Notizen[1] zu "Essential Mathematics for Economic Analysis[?]" der Authoren K. Sydsaeter und P. Hammond

S. Bächler

19. September 2014

[1]Eigentlich ist es eine Zusammenfassung. Ich habe jedoch absichtlich das Wort Notizen gewählt, um zu signalisieren, dass gewisse Teile noch mit Fehlern behaftet sind. Ein weiteres Buch, in welchem ich hin und wieder nachgeschlagen habe, ist die Formelsammlung von Bartsch[**?**].

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführende Algebra

1.1 Rechenregeln

(1)	$a + b = b + a$	(2)	$(a + b) + c = a + (b + c)$
(3)	$a + 0 = a$	(4)	$a + (-a) = 0$
(5)	$a \cdot b = b \cdot a$	(6)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(7)	$1 \cdot a = a$	(8)	$a \cdot a^{-1} = 1$ für $a \neq 0$
(9)	$(-a)b = a(-b) = -a \cdot b$	(10)	$(-a)(-b) = a \cdot b$
(11)	$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	(12)	$(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$

1.2 Ungleichheiten

$$(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (a + b > 0) \wedge (a \cdot b > 0) \tag{1.1}$$

$$(a > b) \Rightarrow (a + c) > (b + c) \ \forall\ c \tag{1.2}$$

$$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c) \tag{1.3}$$

$$(a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow (a \cdot c) > (b \cdot c) \tag{1.4}$$

$$(a > b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (a \cdot c) < (b \cdot c) \tag{1.5}$$

$$(a > b) \wedge (c > d) \Rightarrow (a + c) > (b + d) \tag{1.6}$$

1.3 Beschränkte Intervalle

(a)	Offenes Intervall:	$(a, b) \Longleftrightarrow a < x < b$
(b)	Geschlossenes Intervall:	$[a, b] \Longleftrightarrow a \leq x \leq b$
(c)	Halboffenes Intervall:	$(a, b] \Longleftrightarrow a < x \leq b$
(d)	Halboffenes Intervall:	$[a, b) \Longleftrightarrow a \leq x < b$

1.4 Potenz

1.4.1 Definition

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ Faktoren}$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

1.4.2 Eigenschaften der Potenz

(i) $a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s\ Faktoren} = a^{r+s}$

(ii) $(a^r)^s = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren}}_{s\ Faktoren} = a^{r \cdot s}$

(iii) $(a^r)^s = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r\ Faktoren}}_{s\ Faktoren} = a^{r \cdot s}$

1.5 Gleichungen

1.5.1 Strukturelle und reduzierte Form

$$Y = C + \bar{I}C = a + b \cdot Y \tag{1.7}$$

$$Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b} \cdot \bar{I} \tag{1.8}$$

1.7 wird strukturelle und 1.8 reduzierte Gleichung genannt.

1.5.2 Affin-lineare Gleichung

$y = ax + b$

1.5.3 Quadratische Gleichung

$$ax^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{1.9}$$

Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung

Ausgangslage bildet Gleichung (1.9).

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$
$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(i) Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung, wenn

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0 \text{ weil } a^2 > 0$$

(ii) Die quadratische Gleichung hat eine reelle Lösung, wenn

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} &\text{Für } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ und } (a \neq 0) \text{ gilt:} \\ &ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ i \in \{1, 2\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Weitere Eigenschaft der quadratischen Gleichung

$b^2 - 4ac \geq 0$ und

x_1, x_2 sind (reelle) Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{1.11}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ und } x_1 x_2 = \frac{c}{a} \tag{1.12}$$

weil

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= (x - x_1)(x - x_2) \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \end{aligned}$$

Kapitel 2

Verschiedenes

2.1 Über den Umgang mit Summen

2.1.1 Additivitätseigenschaft

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n \\ &= \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{n\ mal} + \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}_{n\ mal} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.2 Homogenitätseigenschaft

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (c ist eine Konstante.)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.3 Weitere Hinweise zum Rechnen mit Summen

$$\sum_{i=1}^{n} = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n\ mal} = nc \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{2.4}$$

Beweis von 2.4

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n && (*)\\
x &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 && (**)\\
&\text{(*) und (**) zusammengezählt}\\
2x &= (1+n) + (1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n) = n(1+n)\\
x &= \frac{1}{2}n(1+n)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2 \tag{2.6}$$

2.1.4 Doppelsummen

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & . & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

Mit Hilfe von Doppelsummen können obige a_{ij}s zusammengezählt werden. Man stelle sich zwei Ansätze vor:

1. Aufsummieren über die Zeilen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

2. Aufsummieren über die Spalten

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Aus den obigen beiden Berechnungsarten folgt:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tag{2.7}$$

2.2 Die Binomialformel von Newton

$$
\begin{aligned}
(a+b)^m &= a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \ldots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m\\
\text{wobei } \binom{m}{k} &= \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!},\ \binom{m}{0} = 1
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \tag{2.9}$$

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \tag{2.10}$$

$$\binom{m}{k} = \left(\frac{m!}{(m-k)!k!}\right) \tag{2.11}$$

2.3 Logik

2.3.1 Einführung von Begriffen

* P $\Rightarrow Q$: P impliziert Q; wenn P, dann Q; Q ist eine Konsequenz von P; Q wenn P; P nur wenn Q; Q ist eine Implikation von P

* P $\Leftrightarrow$ Q: P ist äquivalent zu Q; P genau dann wenn Q; P iff Q

* P $\Rightarrow$ Q $\Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$

* $\neg$: nicht

2.4 Beweisführung

Direkter Beweis Man beginnt mit einer Annahme und zeigt dann das Resultat.

Indirekter Beweis Man nimmt das Gegenteil an und zigt dann, dass dies zu einem Wiederspruch führt.

2.5 Mengen

2.5.1 Mengenzugehörigkeit

Seien A und B Mengen.

* $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

* $A \subseteq B \ldots$ A ist Teilmenge von B.

2.5.2 Mengenoperationen

* $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

* $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

* $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

* A, B disjunkt $\Longleftrightarrow A \cap B = \{\}$

* Komplement von $A \Longleftrightarrow \{x : x \notin A\}$

2.5.3 Das Prinzip der mathematischen Induktion

Sei A(n) ein Statement $\forall n \in \mathbb{N}$ und

(i) A(1) ist wahr

(ii) Induktionshypothese ist wahr $\Rightarrow$ A(k+1) ist wahr $\forall\ k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ A(n) ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$.

Kapitel 3

Arithmetik

3.1 Menge der reelen Zahlen

3.1.1 Zahlenmengen

$$\begin{aligned} \text{Natürliche Zahlen: } & \mathbb{N} \in \{1, 2, 3, ...\} \\ \text{Ganze Zahlen: } & \mathbb{Z} \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} \\ \text{Rationale Zahlen: } & \mathbb{Q} \in \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \\ \text{Reelle Zahlen: } & \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.1.2 Gerade Zahlen

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{2n\} = \{2, 4, 6, ...\}$

3.1.3 Ungerade Zahlen

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{2n + 1\} = \{1, 3, 5, ...\}$

3.1.4 Grundoperationen

Betrag (Absolutbetrag) einer reelen Zahl

Definition

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0, \\ a(-1) & \text{if } a < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Abb. 1 (Zahlenstrahl mit x_1 und x_2 drauf)

Distanz zwischen x_1 und x_2 auf der Zahlengerade

$d = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$, d. . . Distanz

Bemerkenswertes im Umgang mit Beträgen

$$
\begin{aligned}
&|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a \Leftrightarrow x^2 = a^2 \\
&|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a) \\
&|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\
&|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash [-a, a] \\
&|x| \geq a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash (-a, a)
\end{aligned}
$$

Zur Dreiecksungleichung

$$
\begin{gathered}
|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \\
|a \pm b| \geq ||a| - |b|| \\
|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| \\
|ab| = |a||b| \\
|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}
\end{gathered}
$$

Kapitel 4

Folgen und Reihen

4.1 Einführung

Sturkturen der Art

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{16}\ ,\ \frac{1}{32}\ ,\ \dots$$

werden Folgen genannt und Strukturen der Art

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$$

werden Reihen genannt.

4.2 Geometrische Reihen

4.2.1 Finite geometrische Reihen

$$\sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a\frac{k^n-1}{k-1} \quad \text{k} \neq 1 \tag{4.1}$$

Herleitung:

$$s_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} \tag{4.2}$$

$$ks_n = ak + ak^2 + \dots + ak^n \tag{4.3}$$

(4.2) minus (4.3) ergibt

$$s_n(1-k) = a - ak^n \Longrightarrow (4.1)$$

4.2.2 Infinite geometrische Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} ak^{n-1} = \frac{a}{1-k} \quad \text{wenn } |k| < 1 \tag{4.4}$$

Herleitung: Mit (4.1) kann man schreiben

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a\frac{k^n-1}{k-1} = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-k^n}{1-k} \\
&= \frac{a}{1-k} + \lim_{n\to\infty}\frac{-k^n}{1-k} = \frac{a}{1-k}, \text{ weil } k^n \to 0 \text{ wenn } |k| < 1
\end{aligned}$$

4.3 Unendliche Reihen

4.3.1 Berühmte Reihen

Die harmonische Reihe

Die harmonische Reihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right)$ divergiert.

4.3.2 Summen einiger unendlicher konvergenter Zahlenreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... = \frac{\pi^4}{90} \tag{4.6}$$

Kapitel 5

Funktionen mit einer veränderlichen Variablen

5.1 Einführung

5.1.1 Definition

$y = f(x)$: f ist eine Funktion von x auf einem Definitonsbereich von D (fett). Sie ordnet jedem Element aus D (fett) eine einzigartige reelle Zahl zu. Die Menge der möglichen Werte $f(x)$ wird Wertemenge genannt.
x wird unabhängige (in der Oekonomie exogene) Variable genannt. y wird abhängige (in der Oekonomie endogene) Variable genannt.
Die Definition einer Funktion ist unvollständig, wenn der Definitionsbereicht nicht angegeben wird.

5.1.2 Das kartesische Koordinatensystem

(Abb. 2)

5.1.3 Wichtige Funktionen

(s. 92 im Sydsaeter und diese aus dem Buch Calculus)

5.1.4 Steigung a einer Geraden

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ x_1 \neq x_2$$

5.1.5 Gleichung der Gerade in der Ebene

$$Ax + By + C = 0$$

5.1.6 Formale Beschreibung einer Budgetbeschränkung

$$B = \{(x, y) : p_1 x + p_2 y \leq m,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

B ...Menge der Güterbündel, welche eine Person kaufen kann.
$p_1(p_2)$ ...Preis von Gut x(y)
$x(y)$ ...Gut x(y)
m ...Einkommen der Person

(Abb. 3)

5.1.7 Marktgleichgewicht bei linearer Angebots- und Nachfragefunktion

$$D = a - bP \text{ (Nachfrage)}$$
$$S = \alpha + \beta P \text{ (Angebot)}$$
$$P^* = \frac{a-\alpha}{\beta+b}; \quad Q^* = \frac{a\beta+\alpha b}{\beta+b}$$

5.1.8 Polynome

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{5.1}$$

a ist konstant und $a_n \neq 0$. Man nennt $P(x)$ ein Polynom vom Grade n. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ werden Koeffizienten genannt.

Regel

$$P(x) \text{ hat den Faktor } (x-a) \Longleftrightarrow P(a) = 0 \tag{5.2}$$

Begründung und Erklärung obiger Aussage

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$

$P(x), q(x), Q(x)$ sind Polynome. $r(x)$ ist der Rest, wenn $P(x)$ durch $Q(x)$ geteilt wird. Wird $P(x)$ durch $q(x)$ geteilt können zwei Fälle auftreten:

Fall 1

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x)$$

$\Longleftrightarrow Q(x)$ist ein Faktor von $P(x)$

Fall 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

$\Longleftrightarrow Q(x)$ist kein Faktor von $P(x)$ $r(x)$ ist der Rest der Division.

5.2 kann nun wie folgt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}(x-a) &\text{ ist Faktor von } P(x)\\ &\iff \frac{P(x)}{(x-a)} = q(x)\\ &\iff P(x) = q(x)(x-a)\end{aligned}$$

$$x = a \Rightarrow P(a) = q(a)(0) = 0$$

Ich denke, dass man hier nun noch die Rückrichtung zeigen müsste, was ich an dieser Stelle mal auslasse.

5.2 Berühmte Funktionen

5.2.1 Potenzfunktion

Allgemein

$$f(x) = Ax^r \ (x > 0,\ r \text{ und } A \text{ konstant})$$

Abb. 4 Sydsaeter s. 120 Graph ...

5.2.2 Exponentialfunktion

Allgemein

$$f(t) = Aa^t \ (a,\ A \text{ Positive Konstanten})$$

a ist der Faktor, um welchen sich $f(t)$ erhöht, wenn sich t um 1 erhöht. Sei $u = t + 1$, dann gilt:

$$f(u) = f(t+1) = Aa^{t+1} = \underbrace{Aa^t}_{f(t)} a = f(t)a$$

Eine andere Eigenschaft, die in ökonomischen Wachstumsmodellen angewendet wird lautet:

$$f(t) = Aa^t \wedge f(0) = A \cdot 1 \Rightarrow f(t) = f(0)a^t$$

5.2.3 Die E-Funktion

Allgemein

$$f(x) = e^x$$

5.2.4 Der Logarithmus

Definition

$$e^{\ln a} = a \ (a > 0)$$

Logarithmengesetze

(a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(b) $\ln x^p = p \cdot \ln x$

(c) $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $x = e^{\ln x}$ und $\ln e^x = x$ $(x > 0)$

Natürlicher Logarithmus von x

$$g(x) = \ln x \ (x > 0)$$

Grafik Abb. 5; s. 130 Sydsaeter

5.3 Eigenschaften von Funktionen

5.3.1 Verschiebung eines Graphen

(i) y wird zu $y = f(x) + c$: Graph verschiebt sich nach oben um c, wenn $c > 0$ (nach unten, wenn $c < 0$)

(ii) y wird zu $y = f(x + c)$: Graph verschiebt sich nach links um c, wenn $c > 0$ (nach rechts, wenn $c < 0$)

(iii) y wird zu $y = cf(x)$: Graph wird vertikal gestreckt, wenn $c > 0$ (vertikal gestreckt und an der x-Achse gespiegelt, wenn $c < 0$)

(iv) y wird zu $y = f(x)$: Graph wird an der y-Achse gespiegelt.

(Abb. Figur 6 vom Sydsaeter s. 137)

5.3.2 Zusammensetzen von Funktionen

$$\text{Produkt: } F(x) = g(x) \cdot f(x)$$
$$\text{Quotient: } F(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$
$$\text{Komposition: } y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

5.3.3 Inverse einer Funktion

$$g(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x) \quad (x \in A,\ y \in B)$$

Eine Inverse einer Funktion kann nur gebildet werden, wenn jedem x genau ein y zugeordnet wird und umgekehrt.

Satz Wenn zwei Funktionen f und g invers zueinander sind, dann sind ihre beiden Graphen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ symmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$.

Begründung: Seien f und g zueinander symmetrische Funktionen. Sei weiter (a, b) ein Punkt auf f. Dann gilt:

(a, b) ist ein Punkt auf $f \Rightarrow b = f(a)$

g Inverse von $f \Rightarrow a = f(b) \Rightarrow (b, a)$ liegt auf g

$\big((a, b)$ liegt auf $f\big) \wedge \big((b, a)$ liegt auf $g\big)$

$\Rightarrow$ Satz

5.3.4 Distanz zwischen zwei Punkten

Seien (x_1, y_2) und (x_2, y_2) zwei Punkte in der Ebene, dann folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{5.3}$$

wobei d die Distanz zwischen den beiden Punkten darstellt.

5.3.5 Kreisgleichung

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ (a, b) \ldots &\text{Zentrum des Kreises} \\ r \ldots &\text{Radius des Kreises} \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3.6 Ellipsengleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{5.5}$$

5.3.7 Hyperbelgleichung 1

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{5.6}$$

5.3.8 Hyperbelgleichung 2

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1 \tag{5.7}$$

Kapitel 6

Differentiation

6.1 Definition und Notation

(Abb. 14 siehe Beiblatt) Die Ableitung einer Funktion f im Punkt a, bezeichnet mit $f'(a)$, ist definert als:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6.1}$$

Die Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $\big(a, f(a)\big)$ lautet:

$$g(x) - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{6.2}$$

Begründung, dass 6.2 gilt:

$$\begin{aligned} \text{Allgemeine Geradenleichung: } & y = ax + c \\ \text{Per Definition gilt: } & a = f'(x) \end{aligned}$$

Gerade geht duch Punkt $\big(a, f(a)\big)$ und somit:

$$\begin{aligned} f(a) = f'(a)a + c \iff & c = f(a) - f'(a)a \\ \implies & g(x) = f'(x)x + f(a) - f'(a)a \\ \implies & g(x) - f(a) = f'(x)(x - a) \end{aligned}$$

6.1.1 Verschiedene Differentationsnotationen

$$\begin{aligned} y = f(x) \implies & f'(x) \\ \iff & \frac{dy}{dx} \\ \iff & \frac{df(x)}{dx} \\ \iff & \frac{d}{dx} f(x) \end{aligned}$$

6.1.2 Fallende und steigende Funktionen

f definiert auf I und x_1, $x_2 \in I$.

$$\begin{aligned}
&f(x_2) \geq f(x_1) \text{ für } x_2 > x_1 \Longrightarrow f \text{ ist steigend } \in I\\
&f(x_2) > f(x_1) \text{ für } x_2 > x_1 \Longrightarrow f \text{ ist srikt steigend } \in I\\
&f(x_2) \leq f(x_1) \text{ für } x_2 > x_1 \Longrightarrow f \text{ ist fallend } \in I\\
&f(x_2) < f(x_1) \text{ für } x_2 > x_1 \Longrightarrow f \text{ ist strikt fallend } \in I
\end{aligned}$$

Äquivalente Aussagen

$$\begin{aligned}
&f'(x) \geq 0\ \forall x \in I \Longleftrightarrow f \text{ ist steigend } \in I\\
&f'(x) > 0\ \forall x \in I \Longleftrightarrow f \text{ ist strikt steigend } \in I\\
&f'(x) \leq 0\ \forall x \in I \Longleftrightarrow f \text{ ist fallend } \in I\\
&f'(x) < 0\ \forall x \in I \Longleftrightarrow f \text{ ist strikt fallend } \in I\\
&f'(x) = 0\ \forall x \in I \Longleftrightarrow f \text{ ist konstant } \in I
\end{aligned}$$

6.2 Änderungsraten

6.2.1 Instantane Änderungsrate

$f'(a)$ wird instantane Änderungsrate der Funktion f im Punkt a genannt.

6.2.2 Relative Änderungsrate

$\frac{f'(a)}{f(a)}$ wird relative Änderungsrate der Funktion f im Punkt a genannt.

6.2.3 Ökonomischer Exkurs

Seien $C(x)$ die Kosten um x Einheiten eines Gutes herzustellen, dann sind $C'(x)$ die marignalen Kosten.

6.3 Ausführungen zum Limes

6.3.1 Die Limes Definition

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta\\
&\Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A
\end{aligned}$$

(Abb.: Figur 6 s. 254 im Sydsaeter, aber die wird taff!)

6.3.2 Notation

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ oder } f(x) \to A \text{ wenn } x \to a$$

Sprich: $f(x)$ geht gegen A, wenn x gegen a geht.

6.3.3 Links- und rechtsseitiger Limes

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \left[\lim_{x\to a^-} f(x) = A \text{ und } \lim_{x\to a^+} f(x) = A\right]$$

$\lim_{x\to a^-}$: Linksseitiger Limes

$\lim_{x\to a^+}$: Rechtsseitiger Limes

6.3.4 Rechenregeln zum Limes

$$\text{Wenn } \lim_{x\to a} f(x) = A \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = B, \text{ dann gilt:}$$

$(a)\ \lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$

$(b)\ \lim_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$

$(c)\ \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (wenn B $\neq 0$)

$(d)\ \lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^r = A^r$ (wenn A^r definiert ist und r irgendeine reele Zahl ist)

6.3.5 Satz

Wenn die Funktonen f und g gleich sind $\forall x$ nahe bei a (aber nicht zwingend bei $x = a$), dann gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

wenn immer einer der beiden Limes existiert.

6.4 Differentationsregeln

$(a)\ f(x) = A \quad \Longrightarrow f'(x) = 0$ (A ist eine Konstante)

$(b)\ y = A + f(x) \quad \Longrightarrow y' = f'(x)$

$(c)\ y = Af(x) \quad \Longrightarrow y' = Af'(x)$

Oder in Leibniz'scher Schreibweise geschrieben:

$$(a) \qquad \frac{d}{dx}A = 0$$

$$(b) \qquad \frac{d}{dx}[A + f(x)] = \frac{d}{dx}f(x)$$

$$(c) \qquad \frac{d}{dx}[Af(x)] = A\frac{d}{dx}f(x)$$

6.5 Potenzregel

$$f(x) = x^a \Longrightarrow f'(x) = ax^{a-1}$$

6.6 Summenregel

Wenn f und g beide in x differenzierbar sind, dann ist auch die Summe und die Differenz beider Funktionen differenzierbar in x.

$$F(x) = f(x) \pm g(x) \Longrightarrow F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Leibniz'sche Alternative:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

6.7 Produktregel

Wenn f und g differenzierbar sind im Punkt x, dann ist auch ihr Produkt differenzierbar und

$$F(x) = f(x)g(x) \Longrightarrow F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Leibniz'sche Alternative:

$$\frac{d}{dx}\big[f(x)g(x)\big] = \big[\frac{d}{dx}f(x)\big]g(x) + f(x)\big[\frac{d}{dx}g(x)\big]$$

6.8 Quotientenregel

Wenn f und g differezierbar sind im Punkt x und $g(x) = 0$, dann ist auch $F(x) = f(x)/g(x)$ differenzierbar im Punkt x und

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2} = F'(x)$$

6.9 Relative Wachstumsrate eines Quotienten

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \tag{6.3}$$

6.9.1 Relative Wachstumsrate des Reallohns

Reallohn $w(t) = \frac{W(t)}{P(t)}$ ($W(t)\ldots$ Nominallohn, $P(t)\ldots$ Preisniveau)

Gemäss 6.3 folgt:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \underbrace{\frac{\dot{W}(t)}{W(t)}}_{(1)} - \underbrace{\frac{\dot{P}(t)}{P(t)}}_{(2)}$$

(1) Relative Wachstumsrate des Nominallohnes, also um wieviel Prozent die Nominallöhne gestiegen sind.

(2) Relative Wachstumsrate des Preisniveaus, also um wieviel Prozent das Preisniveau gestiegen ist.

Sei $\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = 5\%$ und $\frac{\dot{P}(t)}{P(t)} = 3\ \% \Longrightarrow \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = 2\%$, d.h die Reallöhne sind um 2 % gestiegen.

6.10 Kettenregel

Wenn g differenzierbar ist in x_0 und f ist differenzierbar in $u_0 = g(x_0)$, dann ist $F(x) = f(g(x))$ differenzierbar im Punkt x_0 und

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

In Leibniz'scher Schreibweise:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

6.11 Konvexe und konkave Funktionen

$$f''(x) \geq 0 \text{ auf I } \Longleftrightarrow f'(x) \text{ ist steigend auf I}$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ auf I } \Longleftrightarrow f'(x) \text{ ist fallend auf I}$$

$$\text{f ist convex auf I} \Longleftrightarrow f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$$

$$\text{f ist konkav auf I} \Longleftrightarrow f''(x) \leq 0\ \forall x \in I$$

6.12 Ableitungen höherer Ordnung

$$y = f(x)$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) \text{ oder } \frac{d^n f}{dx^n}$$

Obigem sagt man n-te Ableitung von f im Punkt x.

6.13 Exponentialfunktionen

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x \tag{6.4}$$

6.13.1 Allgemeiner Fall

$$y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \ln a$$

Beweis mit Hilfe von 6.4:

$$\begin{aligned} a^x &= \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x} = e^u,\ (u = (\ln a)x) \\ \frac{d}{dx}e^u &= e^u \frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x} \ln a = a^x \ln a \end{aligned}$$

6.14 Logarithmische Funktionen

$$g(x) = \ln x\ (x > 0) \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

Beweis wiederum mit Hilfe von 6.4:

$$\begin{aligned} g(x) = \ln x \text{ und } e^{g(x)} &= e^{\ln x} = x \\ \left(e^{g(x)}\right)' &= x' = 1 = \underbrace{e^{g(x)}}_{x} g'(x) = xg'(x) \\ &\Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

6.14.1 Logarithmus in zusammengesetzter Funktion

$$y = \ln h(x) \Longrightarrow y' = \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{6.5}$$

Relative Wachstumsrate Sei $N(t)$ eine Funktion für Anzahl Erdeinwohner über die Zeit.

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{6.5} \frac{d}{dt} \ln N(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \tag{6.6}$$

6.6 entspricht dann dem relativen Bevölkerungswachstum (e.g. 2%).

6.14.2 Ableitung von Logarithmus x zur Basis a

$$y = \log_a x \Longrightarrow y' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

6.14.3 Bemerkung zur Zahl e

$$
\begin{aligned}
g(x) = \ln x \Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x} &\text{ und insbesondere } g'(x) = 1 \\
1 = g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) \\
&= \lim_{h\to 0} \ln(1+h)^{1/h} \\
\Longrightarrow \lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} &= e, \text{ weil } \ln e = 1
\end{aligned}
$$

6.15 Anwendung der Differentialrechnung

6.15.1 Implizites Differential

Wenn zwei Variabeln x und y aufgrund einer Gleichung zueinander in einer Beziehung stehen, dann findet man y' indem man:

(a) Beide Seiten der Gleichung nach x ableitet, wobei berücksichtigt werden muss, dass y von x abhängt.

(b) die Gleichung, welche aus (a) resultiert muss dan nach y' aufgelöst werden.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
xy &= 5 \\
\text{(a) } y + xy' &= 0 \\
\text{(b) } y' &= -\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

6.15.2 Satz über inverse Funktionen

Wenn f auf einem Intervall I differenzierbar und strikt ansteigend (oder strikt fallend) ist, dann hat f eine inverse Funktion g, die strikt ansteigend (strikt fallend) ist auf dem Intervall $f(I)$. Wenn x_0 ein innerer Punkt von I und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$
g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad (y_0 = f(x_0)) \tag{6.7}
$$

Herleitung f und g sind zueinander invers [1]

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow g(f(x)) = x \quad \forall x \in I \\
&\Longrightarrow g'(f(x))\, f'(x) = 1 \\
&\Longrightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{wobei } f'(x) \neq 0)
\end{aligned}
$$

[1] Nicht geklärt für mich ist, wieso gilt: f differenzierbar auf Intervall $I \Longrightarrow f$ hat eine inverse Funktion g

Eine Anwendung zum obigen Satz Seien f und g invers zueinander. Sei im Punkt P $a = f'(x_0)$. Dann gilt für den Punkt Q: $g'(f(x_0)) = \frac{1}{a}$.
(Abb.: Figur 1 s. 224 im Sydsaeter)

6.15.3 Lineare Approximationen

Die lineare Approximation von f bei $x = a$ ist

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad x \text{ in der Näche von } a$$

(Abb.: Figure 1 s. 226 im Sydsaeter)

Das Differential einer Funktion

$$y = f(x)$$

Die erste Ableitung in der Leibniz'schen Schreibweise ist dann

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Sage nun der ersten Ableitung $f'(x)$, dann gilt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Longleftrightarrow dy = \underbrace{dxf'(x)}_{Differential} \tag{6.8}$$

Δy wird definiert als

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \tag{6.9}$$

Eine lineare Approximation an der Stelle $(x + dx)$ ist:

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx \tag{6.10}$$

Aus 6.9 und 6.10 folgt:

$$\Delta y \approx f'(x)dx = dy \quad \text{wegen Definition Differential}$$

(Abb.: Figur 2 s. 227 im Sydsaeter)

Rechenregeln zum Differential $f = f(x)$ und $g = g(x)$

$$(a)\ d(af + bg) = adf + bdg \quad (a, b \text{ sind Konstanten})$$
$$(b)\ d(fg) = gdf + fdg$$
$$(c)\ d\left(\frac{d}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$$

Man sieht, die Regeln, welche beim Differenzieren gelten, gelten auch beim differntial.

Herleitungen:

$$(a) \quad d(af+bg) = (af+bg)'dx = (af'(x)+bg'(x))dx = a\underbrace{f'(x)dx}_{df} + b\underbrace{g'(x)dx}_{dg}$$

$$(b) \quad d(fg) = (fg)'dx = (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))\,dx = \underbrace{f'(x)dx}_{df}\,g(x) + f(x)\underbrace{g'(x)dx}_{dg}$$

(c) wird analog hergeleitet.

6.15.4 Polynomapproximationen

Quadratische Approximation

Die Funktion $f(x)$ wir durch eine Funktion $p(x)$ approximiert:

$$f(x) \approx p(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$$
$$\text{mit } f(a) = p(a),\ f'(a) = p'(a),\ f''(a) = p''(a)$$
$$p'(x) = B + 2C(x-a) \text{ und } p''(x) = 2C$$

mit $x = a$ wird $p(a) = A, \quad p'(a) = B \quad \text{und} \quad p''(a) = 2C \Longleftrightarrow \frac{1}{2}p''(x) = C$

Und somit:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a^2), \quad (x \text{ in Nähe von } a) \tag{6.11}$$

6.11 wird quadratische Approximantion von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ genannt.

Das Taylor Polynom

$$f(x) \approx p(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n$$
$$\text{mit} \quad f(a) = p(a), \quad f'(a) = p'(a), \ldots \quad f^n(a) = p^n(a)$$

Mit Hilfe von obigen zwei Zeilen erhält man dann das Tylor Polynom:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^2(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{6.12}$$

mit Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)x^{n+1}$$

f muss $n+1$ mal differenzierbar sein in $[0, x]$. c ist dabei eine Nummer zwischen 0 und x.

Taylors Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x \\ &+ \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)x^{n+1} \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.15.5 Die Elastizität

$$x = D(p) \tag{6.14}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{D(p)} \tag{6.15}$$

$$\frac{\Delta x}{x} \text{ geteilt durch } \frac{\Delta p}{p} \tag{6.16}$$

(6.14) Nachfrage nach einem Gut x in Abhänigkeit vom Preis p.

(6.15) Relative Nachfrageänderung in einem Punkt x.

(6.14) Relative Nachfrageänderung pro Einheit relative Preisänderung; das entspricht dann der Elastizität.

6.15 in 6.16

$$\frac{p}{D(p)} \frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{\Delta p}$$

Nun, wie ändert das Nachfrageverhalten, wenn sich der Preis nur marginal ändert?

$$\lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{p}{D(p)} \frac{D(p + \Delta p) - D(p)}{\Delta p} \right) = \frac{p}{D(p)} D'(p)$$

Obiges folgt sofort aus der Definition des Limes (siehe Abschnitt 6.3)

Elastizität f ist differenzierbar in x und $f(x) \neq 0$, dann ist die Elastizität von f bezüglich x definiert als

$$\mathrm{El}_x\ f(x) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \text{ oder } \left[= \frac{x}{f(x)} \frac{df}{dx} \right] \tag{6.17}$$

Terminologie

- Wenn $|\mathrm{El}_x\ f(x)| > 1$, dann ist f elastisch in x
- Wenn $|\mathrm{El}_x\ f(x)| = 1$, dann ist f einheits-elastisch in x
- Wenn $|\mathrm{El}_x\ f(x)| < 1$, dann ist f unelastisch in x
- Wenn $|\mathrm{El}_x\ f(x)| = 1$, dann ist f vollständig unelastisch in x

Ob es das deutsche Wort einheitselastisch wirklich gibt, bin ich mir nicht sicher. Funky wäre, wenn man an dieser Stelle noch Grafiken einbauen würde, welche obiges noch graphisch untermauern würden.

Logarithmus und Elastizität

$$\begin{aligned} y = f(x) &= Ax^a \quad (x, y, A > 0) \\ \ln y &= \ln A + a \ln x \end{aligned}$$

$$\mathrm{El}_x y = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{d \ln x} \tag{6.18}$$

Sydsaeter erklärt $\left(\frac{d\ln y}{d\ln x}\right)$ auf Seite 241. Ich habe seine Idee leider nicht gecheckt.

Rechenregeln für Elastizitäten

(a) $\mathrm{El}_x\ A = 0$

(b) $\mathrm{El}_x\ (fg) = \mathrm{El}_x\ f + \mathrm{El}_x\ g$

(c) $\mathrm{El}_x\ \dfrac{f}{g} = \mathrm{El}_x\ f - \mathrm{El}_x\ g$

(d) $\mathrm{El}_x\ (f+g) = \dfrac{f\mathrm{El}_x\ f + g\mathrm{El}_x g}{f+g}$

(e) $\mathrm{El}_x\ (f-g) = \dfrac{f\mathrm{El}_x\ f - g\mathrm{El}_x g}{f-g}$

(f) $\mathrm{El}_x\ (f(g(x)) = \mathrm{El}_u\ f(u)\mathrm{El}_x\ u \quad (u = g(x))$

6.15.6 Stetigkeit

Definition

f ist stetig in $x = a$, wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\Longleftrightarrow$$

(i) Die Funktion f muss definiert sein in x=a.
(ii) Der Limes, wenn $x \to a$ muss existieren.
(iii) Dieser Limes muss exakt $f(a)$ entsprechen.

Wenn also nicht (i) bis (iii) in a erfüllt sind, dann ist f im Punkt a nicht stetig.

6.15.7 Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetige Funktionen in a sind, dann

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in a
(b) fg und f/g (wenn $g(a) \neq 0$) sind stetig in a
(c) $[f(x)]^r$ ist stetig in a, falls $[f(a)]^r$ definiert ist (r eine reele Zahl)
(d) Wenn f eine Inverse auf dem Intervall I hat, dann ist diese inverse f^{-1} ebenfalls stetig auf $f(I)$.

Diese Regeln können leicht mit den Regeln aus Abschnitt 6.3.4 gezeigt werden - ausser (d).

Allgemein gilt: Wenn eine Funktion zusammengebaut wird aus stetigen Funktionen mit Hilfe von Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (aussser geteilt durch Null) und Komposition, dann ist diese neue Funktion wieder stetig.

6.15.8 Zusammenhang Differzierbarkeit - Stetigkeit

$$f \text{ ist differenzierbar in } x = a \Longrightarrow f \text{ ist stetig in } x = a \qquad (6.19)$$

Achtung: Umkehrung gilt nicht!

$$\begin{gathered}\text{Beweis:}\\ \text{z.z. } \lim_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a)\right)=0\\ f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\\ \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right)=f'(a)\cdot 0=0\end{gathered}$$

Verwende Definition Ableitung (Abschnitt 6.1) und die Rechenregeln zum Limes (Abschnitt 6.3.4)

6.15.9 Mittelwertsatz

Mittelwertsatz Wenn f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ ist und $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, dann gibt es mindestens ein $c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Der Newton'sche Nullpunkt-Spürhund

(Figur 1 s.256 im Sydsaeter)

$$\begin{gathered}f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)\\ x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\dots\end{gathered}$$

Newtons Methode

$$\text{Für } f'(x)\neq 0\ :\ x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2\dots \qquad (6.20)$$

Auf Seite 259 beschreibt Sydsaeter ein Konvergenzkriterium für die Newton'sche Nethode. Aus Zeigründen lasse ich dieses mal aussen vor.

6.15.10 Unendliche Folgen

Notation $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$

Hat eine Folge einen Grenzwert (Limes), so sagt man, dass die Folge gegen eben diesen konvergiert. Hat eine Folge keinen Grenzwert (Limes), so sagt man, dass die Folge divergiert.

6.15.11 Regel von Bernoulli und L'Hopital

Seien f und g auf einem Interval (α, β), welches a enthält, differenzierbare Funktionen ausser möglicherweise in a. Und gelte weiter, dass $f(x), g(x) \to 0$ wenn $x \to a$.

$$\left\{\begin{array}{r} g'(x) \neq 0 \forall\ x \neq 0 \in (\alpha, \beta) \\ \text{und} \\ \lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Dies gilt ob L begrenzt, ∞ oder $-\infty$ ist.

Hinweis: Persöhnlich muss ich immer fest aufpassen, dass ich nicht den Bruch als Ganzes ableite, sondern nur oben und unten.

6.15.12 Exponenten schlucken Potenzen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \quad (a > 1,\ p \text{ ist eine fixierte positive Zahl})$$

Beweis kann mit Bernoulli/L'Hopital geführt werden, wobei ausgenützt werden muss, dass

$$\frac{x^p}{a^x} = \frac{x^p}{e^{(\ln a)x}} = \left(\frac{x}{e^{((\ln a)/p)x}}\right)^p$$

Kapitel 7

Optimierung

7.1 Optimierung bei einer Veränderlichen

7.1.1 Einfache Tests für Extremalpunkte

Extremalpunkte

Sei f definiert auf D

$$c \in D \text{ ist ein Maximalpunkt für } f \iff f(x) \leq f(c) \; \forall x \in D \tag{7.1}$$

$$d \in D \text{ ist ein Minimalpunkt für } f \iff f(x) \geq f(d) \; \forall x \in D \tag{7.2}$$

First-Order Condition

Sei die Funktion f auf I differenzierbar und c ein innerer Punkt des Intervalls I. Notwendige Bedingung, damit $x = c$ entweder Minimal- oder Maximalpunkt für f auf I sein kann, muss c ein stationärer Punkt sein. D.h. $x = c$ muss der Bedingung

$$f'(x) = 0 \tag{7.3}$$

genügen.

Maximum und Minimum

> Wenn $f'(x) \geq 0$ für $x \leq c$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \geq c$, dann ist $x = c$ ein Maximalpunkt.
>
> Wenn $f'(x) \leq 0$ für $x \leq c$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \geq c$, dann ist $x = c$ ein Minimalpunkt.

Maximum(Minimum) bei konvexen(konkaven) Funktionen

Sei f eine konkave(konvexe) Funktion auf dem Intervall I. Wenn c ein stationärer Punkt ($f'(c) = 0$) für f im inneren von I ist, dann ist c ein Maximalpunkt(Minimalpunkt) für f auf I.

7.1.2 Extremwert-Theorem

Wenn f eine stetige Funktion auf einem geschlossenen, beschränkten Intervall $[a, b]$ ist, dann gibt es einen Punkt d in $[a, b]$, wo f minimal ist und einen Punkt c in $[a, b]$, wo f maximal ist, sodass

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in [a, b]$$

Kandidaten für Extrempunte

(a) Innnere Punkte in I, wo $f'(x) = 0$

(b) Endpunkte in I (sofern eingeschlossen in I)

(c) Innere Punkte in I, wo $f'(x)$ nicht existiert

Wichtig: Punkte mit obigen Eigenschaften sind erst Kandidaten. Es muss dann noch weiter untersucht werden ob es wirklich Extremalstellen sind.

Das Mittelwert Theorem

Wenn f eine stetige Funktion auf dem geschlossenen, beschränken Intervall $[a, b]$ ist und weiter diese Funktion f differenzierbar ist auf dem offenen Intervall (a, b), dann gibt es mindestens einen inneren Punkt x^* in (a, b), so dass

$$f'(x^*) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \tag{7.4}$$

7.1.3 Lokale Extremalstellen

Eine Funktion f hat ein lokales Maximum(Minimum) in c, wenn es über c ein Intervall (α, β) gibt, sodass $f(x) \leq (\geq) f(c)$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$, welche im Definitionsbereich von f sind. Kandidaten für lokale Extrema haben gleiche Eigenschaften wie diejenigen für globale Extrema:

(a) Innnere Punkte in I, wo $f'(x) = 0$

(b) Endpunkte in I (sofern eingeschlossen in I)

(c) Innere Punkte in I, wo $f'(x)$ nicht existiert

Erste Ableitung und lokale Extrema

Sei c ein stationärer Punkt ($f'(c) = 0$) für $y = f(x)$.

(a) Wenn $f'(x) \geq (\leq)\ 0$ über einem Intervall (a, c) rechts von c und $f'(x) \leq (\geq)\ 0$ über einem Interval (c, b) links von c gilt, dann ist $x = c$ ein lokaler Maximalpunkt(Minimalpunt) von f.

(b) Wenn $f'(x) > 0$ über einem Intervall (a, c) rechts von c und über einem Interval (c, b) links von c gilt, dann ist $x = c$ kein lokaler Extremalpunkt von f. Dieselbe Schlussfolgerung folgt, wenn $f'(x) < 0$ auf beiden Seiten von c.

Zweite Ableitung und lokale Extrema

Sei f eine Funktion, die auf dem Intervall I zweimal differenzierbar ist und sei weiter c ein innerer Punkt des Intervalls I, dann gilt:

(a) $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0 \Longrightarrow x = c$ ist ein strikter lokaler Maximalpunkt.

(b) $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0 \Longrightarrow x = c$ ist ein strikter lokaler Minimalpunkt.

(c) $f'(c) = 0$ und $f''(c) = 0 \Longrightarrow$ man weiss nicht so recht...

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

$$c \text{ ist ein lokales Maximum von } f \Longrightarrow f''(c) \leq 0 \tag{7.5}$$

$$c \text{ ist ein lokales Minimum von } f \Longrightarrow f''(c) \geq 0 \tag{7.6}$$

Der Wendepunkt

Man nennt c einen Wendepunkt von f, wenn es über c ein Intervall folgender Art gibt:

$$\text{(a) } f''(x) \geq 0 \text{ auf } (a, c) \text{ und } f''(x) \leq 0 \text{ auf } (c, b)$$

oder

$$\text{(b) } f''(x) \leq 0 \text{ auf } (a, c) \text{ und } f''(x) \geq 0 \text{ auf } (c, b)$$

Wendepunkttest Sei f eine Funktion mit einer stetigen zweiten Ableitung auf einem Intervall I und sei c ein innerer Punkt in I.

(a) Wenn c ein Wendepunkt von f ist, dann $f''(c) = 0$

(b) Wenn $f''(c) = 0$ und $f''(x)$ ändert in c das Vorzeichen, dann ist c ein Wendepunkt von f.

$f''(c) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt.

Konvexität / Konkavität

$$f''(x)\ (<) \leq 0\ \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f(x) \text{ ist (strikt) konkav in } (a, b)$$

$$f''(x)\ (>) \geq 0\ \forall x \in (a, b) \Longrightarrow f(x) \text{ ist (strikt) konvex in } (a, b)$$

7.2 Optimierung bei mehreren Veränderlichen

7.2.1 Notwendige Beingungen für ein inneres Extremum

Eine differenzierbare Funktion $z = f(x, y)$ kann ein Maximum oder ein Minimum bei einem inneren Punkt (x_0, y_0) von S haben, wenn (x_0, y_0) ein stationärer Punkt ist. Dies bedeutet, dass der Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ den zwei Bedingungen

$$f_1'(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f_2'(x, y) = 0$$

genügen muss. Diese Bedingungen werden Bedingungen erster Ordnung genannt.

7.2.2 Hinreichende Beingungen für ein Extremum

Sei (x_0, y_0) ein stationärer Punkt einer C^2-Funktion $f(x, y)$ auf einer konvexen Menge S.

(a)Wenn $\forall\ (x, y) \in S$ gilt:

$f_{11}''(x, y) \leq 0,\quad f_{22}''(x, y) \leq 0$ und $f_{11}''(x, y) f_{22}''(x, y) - \left(f_{12}''(x, y)\right)^2 \geq 0,$
dann ist (x_0, y_0) ein Maximalpunkt von $f(x, y)$ auf S

(b)Wenn $\forall\ (x, y) \in S$ gilt:

$f_{11}''(x, y) \geq 0,\quad f_{22}''(x, y) \geq 0$ und $f_{11}''(x, y) f_{22}''(x, y) - \left(f_{12}''(x, y)\right)^2 \geq 0,$
dann ist (x_0, y_0) ein Minimalpunkt von $f(x, y)$ auf S

Konvexität Eine Menge S in der xy-Ebene ist konvex, wenn für jedes Paar von Punkt P, Q, $\in S$ auch die Verbindungsgerade zwischen P und Q in S liegt.

7.2.3 Lokale Extremalpunkte

Der Sattelpunkt

Ein Stattelpunkt ist ein stationärer Punkt (x_0, y_0), mit der Eigenschaft, dass es Punkte (x, y) in der Umgebung von (x_0, y_0) gibt mit $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, und dass es andere solche Punkte gibt mit $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Test für lokale Extrema

Sei $f(x, y)$ eine Funktion mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen auf einem Definitiosbereich S. Sei weiter (x_0, y_0) ein innnerer Punkt von S, der den Bedingugen eines statinären Punktes auf f genügt, dann gelten folgende Aussagen:

$$A = f''_{11}(x_0, y_0),\ B = f''_{12}(x_0, y_0) \text{ und } C = f''_{22}(x_0, y_0)$$

(i) $A < 0$ und $AC - B^2 > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ ist strikter lokaler Maximalpunkt

(ii) $A > 0$ und $AC - B^2 > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ ist strikter lokaler Minimalpunkt

(iii) $AC - B^2 < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ ist ein Sattelpunkt

(iv) $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ könnte lokaler Maximalpunkt, lokaler Minimalpunkt oder Sattelpunkt sein

Keines von (i) bis (iv) ist notwendig.

7.2.4 Optimierungsanwendung: Lineare Einfachregression

Model: $y_t = \alpha + \beta x_t + e_t \Longleftrightarrow e_t = y_t - \alpha - \beta x_t$
(Abb.: Figure 1 s. 482 im Sydsaeter)

Idee: Mache e_t so klein wie möglich.

Formal: $\min_{\alpha,\beta}\ L(\alpha, \beta)$ wobei

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= T^{-1} \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = T^{-1} \sum (y_t - \alpha - \beta x_t)^2 \\ &= T^{-1} \sum (y_t^2 + \alpha^2 + \beta^2 x_t^2 - 2\alpha y_t - 2\beta x_t y_t + 2\alpha\beta x_t) \end{aligned} \tag{7.7}$$

Notationen aus der Statistik

Mittelwert

$$\mu_x = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t, \quad \mu_y = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

Varianz und Kovarianz

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu_x)^2, \quad \sigma_{yy} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \mu_y)^2 \\ \sigma_{xy} &= T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y) \end{aligned}$$

oder anders formuliert

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \mu_x^2, \quad \sigma_{yy} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \mu_y^2 \\ \sigma_{xy} &= T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t y_t - \mu_x \mu_y \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned}
T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu_x)^2 &= T^{-1}\sum(x_t^2-2x_t\mu_x+\mu_x^2)\\
&= T^{-1}\sum x_t^2 - 2\mu_x T^{-1}\sum x_t + T^{-1}T\mu_x^2\\
&= T^{-1}\sum x_t^2-\mu_x^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu_x)(y_t-\mu_y)\\
&= T^{-1}\sum(x_ty_t-x_t\mu_y-\mu_xy_t+\mu_x\mu_y)\\
&= T^{-1}\left[\sum x_ty_t-\underbrace{\mu_y\sum x_t}_{T\mu_y\mu_x}-\underbrace{\mu_x\sum y_t}_{T\mu_y\mu_x}+T\mu_x\mu_y\right]\\
&= T^{-1}\sum x_ty_t-\mu_x\mu_y
\end{aligned}$$

Obige Erkenntnisse eingesetzt in (7.7) ergibt:

$$\begin{aligned}
&L(\alpha,\beta)=(\sigma_{yy}+\mu_y^2)+\alpha^2+\beta^2(\sigma_{xx}+\mu_x^2)-2\alpha\mu_y-2\beta(\sigma_{xy}+\mu_x\mu_y)+2\alpha\beta\mu_x\\
&=\alpha^2+\mu_y^2+\beta^2\mu_x^2-2\alpha\mu_y-2\beta\mu_x\mu_y+2\alpha\beta\mu_x+\beta^2\sigma_{xx}-2\beta\sigma_{xy}+\sigma_{yy}
\end{aligned}$$

Bedinungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
L_\alpha &= 2\alpha-2\mu_y+2\beta\mu_x=0\\
L_\beta &= 2\beta\mu_x^2-2\mu_x\mu_y+2\alpha\mu_x+2\beta\sigma_{xx}-2\sigma_{xy}=0
\end{aligned}$$

Hinweis $L_\beta=\mu_xL_\alpha+2\beta\sigma_{xx}-2\sigma_{xy}$
Somit erhält man α und β , welche e_t aus obigem Modell minimieren:

$$\hat\beta=\sigma_{xy}/\sigma_{xx},\quad \hat\alpha=\mu_y-\hat\beta\mu_x=\mu_y-(\sigma_{xy}/\sigma_{xx})\mu_x$$

Ist $(\hat\alpha,\hat\beta)$ wirklich ein Minimum? Ja, weil

$$\begin{aligned}
&L_{\alpha\alpha}=2\geq 0,\quad L_{\beta\beta}=2\mu_x^2+2\sigma_{xx}\geq 0\quad\text{und}\\
&L_{\alpha\beta}=2\mu_x,\quad L_{\alpha\alpha}L_{\beta\beta}-(L_{\alpha\beta})^2=4\mu_x^2+4\sigma_{xx}-4\mu_x^2=4\sigma_{xx}\geq 0
\end{aligned}$$

Wegen Theorem (7.2.2) ist $(\hat\alpha,\hat\beta)$ ein Globaler Minimalpunkt.

7.2.5 Das Extremwert Theorem

Man nennt (a,b) einen **inneren Punkt** einer Menge S in der Ebene, wenn es einen Kreis mit Mittelpunkt (a,b) gibt, so dass alle Punkt dieses Kreises im inneren von S liegen.

Man nennt eine Menge **offen** , wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

Man nennt einen Punkt (a, b) **Grenzpunkt** (Boundarypoint) einer Menge S, wenn jeder Kreis mit Mittelpunkt (a, b) Punkte der Menge S und Punkte des Komplementes von S enthält.

Man nennt S eine **geschlossene** Menge, wenn sie alle Grenzpunkte enthält.

(Abb.: Figure 1 s. 486 im Sydsaeter)

Eine Menge S in der Ebene ist **beschränkt** (bounded), wenn man sie in einem Kreis verpacken kann.

Man nennt eine Menge S **kompakt**, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Extremwerttheorem

Sei die Funktion $f(x, y)$ stetig auf einer nicht-leeren, geschlossenen und beschränkten Menge S in der Ebene. Dann gibt es sowohl einen Punkt $(a, b) \in S$, wo f ein Maximum hat als auch einen Punkt $(c, d) \in S$, wo f ein Minimum hat.

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \quad \forall\ (x, y) \in S$$

Aufspüren von Minima und Maxima

Sei $f(x, y)$ eine differenzierbare Funktion, definiert auf einer geschlossenen, beschränkten Menge S in der Ebene:

(i) Finde die stationären Punkte von f im Innern von S.

(ii) Finde die grössten Punkte auf der Grenze von S und die dazu korrespondierenden Punkte (x, y).

(iii) Die grössten Funktionswerte, die in (i) und (ii) gefunden wurden sind Maxima, die kleinsten Minima.

7.2.6 Bedingungen im allgemeinen Fall

Notwendige Bedingungen im allgemeinen Fall

Sei f definiert auf einer Menge S und sei $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ ein Punkt im Innern von S, wobei f im Punkt $\mathbf{c}$ differenzierbar ist. Eine notwendige Bedingung, dass $\mathbf{c}$ ein Maximalpunkt oder ein Minimalpunkt von f ist, ist, dass $\mathbf{c}$ ein stationärer Punkt von f ist, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ genügt den n Gleichungen:

$$f'_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{(FOCs)}$$

Das Extremwert-Theorem im allgemeinen Fall

Wenn f eine stetige Funktion ist auf einer geschlossenen und beschränkten Menge $S \in \mathbb{R}^n$, dann gibt es einen Punkt $\mathbf{d} \in S$, wo f sein Minimum annimmt und einen Punkt $\mathbf{c} \in S$, wo f sein Maximum annimmt.

$$f(\mathbf{d}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{c}) \quad \forall \ \mathbf{x} \in S$$

7.2.7 Ein nützlicher Satz

Sei $f(\mathbf{x}) = f(x_1, .., x_n)$ definiert auf einer Menge $S \in \mathbb{R}^n$ und sei F eine Funktion abhängig von einer Variabel auf einem Interval von f.

$g(\mathbf{x}) \equiv F(f(\mathbf{x}))$

(a) F ist ansteigend und $\mathbf{c}$ maximiert(minimiert) f auf S

$\Longrightarrow$ $\mathbf{c}$ maximiert(minimiert) auch g auf S

$g(\mathbf{x}) \equiv F(f(\mathbf{x}))$

(b) F ist strikt ansteigend und $\mathbf{c}$ maximiert(minimiert) f auf S

$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{c}$ maximiert(minimiert) auch g auf S

Beweis im Sydsaeter s. 495

7.2.8 Das Enveloppen Theorem

Wenn $f^*(\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ und wenn $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ der Wert $\mathbf{x}$ ist, welcher $f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ maximiert, dann

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial r_j}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\mathbf{r})}, \quad j = 1, \dots, k$$

Beweis ist auf s. 497 im Sydsaeter und für mich nicht verständlich.

7.3 Optimierung mit Nebenbedingungen

7.3.1 Der Lagrange Multiplikator

Die Langrange Multiplikator Methode

Problemstellung: $\max(\min)_{x,y}$ s.t. $g(x, y) = c$

Vorgehensweise: (i) Stelle die Lagrange-Funktion auf:
$\mathscr{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$, ($\lambda$ eine Konstante)

(ii) Leite partiell nach x und y ab:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathscr{L}_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ g(x, y) &= c \end{aligned} \tag{7.8}$$

(iii) Löse obiges Gleichungssystem nach x, y und λ auf.

Hinweis Wenn $g_x = 0$ und $g_y = 0$, dann kann es sein, dass die Methode von Lagrange nicht funktioniert.

7.3.2 Interpretation des Lagrange Multiplikators

(x^*, y^*) löse $\max(\min) f(x,y)$ s.t. $g(x,y) = c$. Im Allgemeinen sind x^* und y^* abhängig von c. Seien dann $x^* = x^*(c)$ und $y^* = y^*(c)$ differenzierbare Funktionen von c. Dann kann man Folgendes sagen:

$$f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$$

$$\text{Und somit} \quad \frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c) \tag{7.9}$$

Interpretation Wenn sich c marginal ändert, verändert sich der optimale Wert von f um λ.

Herleitung

$$df^*(c) = f_{x^*} dx^* + f_{y^*} dy^*$$

wegen (7.8) gilt:

$$f_{x^*} = \lambda g_{x^*} \quad \text{und} \quad f_{y^*} = \lambda g_{y^*}$$

und somit

$$df^*(c) = \lambda[g_{x^*} dx^* + g_{y^*} dy^*]$$

weiter gilt:

$$g(x^*(c), y^*(c)) = c \Longrightarrow g_{x^*} dx^* + g_{y^*} dy^* = dc$$

und schliesslich

$$df^*(c) = \lambda dc \Longleftrightarrow df^*(c)/dc = \lambda$$

7.3.3 Der Satz von Lagrange

Seien $f(x,y)$ und $g(x,y)$ Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen auf einem Definitionsbereicht A in der xy-Ebene. Sei weiter (x_0, y_0) zum einen ein innerer Punkt von A und ein lokaler Extremalpunkt von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = c$. Gelte darüber hinaus $g_1'(x_0, y_0) \neq 0$ und $g_2'(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es ein eindeutiges λ, sodass die Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

eine stationären Punkt in (x_0, y_0) hat.

Obiger Satz stellt notwendige aber nicht hinreichende Bedingungen für ein Optimum auf.

7.3.4 Hinreichende Bedingungen für Extrema

Sei $\max(\min) f(x,y)$ s.t. $g(x,y) = c$ ein zu lösendes Optimierungsproblem mit (x_0, y_0) als stationären Punkt der Lagrange-Funktion $\mathscr{L}(x,y)$, dann:

$$(A) \mathscr{L}(x,y) \text{ ist konkav } \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ löst das Maximierungsproblem}$$
$$(B) \mathscr{L}(x,y) \text{ ist konvex } \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ löst das Minimierungsproblem}$$

7.3.5 Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Finde ein lokales Extremum von $f(x,y)$ s.t. $g(x,y) = c$.
Sei (x_0, y_0) ein Punkt, welcher den FOCs

$$f_1'(x,y) = \lambda g_1'(x,y) \quad \text{und} \quad f_2'(x,y) = \lambda g_2'(x,y) \text{ genügt.}$$

Definiere

$$D(x,y,\lambda) = (f_{11}'' - \lambda g_{11}'')(g_2')^2 - 2(f_{12}'' - \lambda g_{12}'')g_1'g_2' + (f_{22}'' - \lambda g_{22}'')(g_1')^2$$

Dann gelten folgende Aussagen:

$$(A)\ D(x_0,y_0,\lambda) < 0 \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ löst das lokale Maximierungsproblem}$$
$$(B)\ D(x_0,y_0,\lambda) > 0 \Longrightarrow (x_0,y_0) \text{ löst das lokale Minimierungsproblem}$$

Vermutung Ich glaube, dass man bei (A) und (B) oben folgendes behaupten darf:

$$D(x_0,y_0,\lambda) < 0 \Longleftrightarrow f(x,y) \text{ ist in } (x_0,y_0) \text{ konkav}$$
$$D(x_0,y_0,\lambda) > 0 \Longleftrightarrow f(x,y) \text{ ist in } (x_0,y_0) \text{ konvex}$$

7.3.6 Lagranges Methode bei mehreren Variabeln und mehreren Nebenbedingungen

Lagrange bei mehreren Variabeln

$$\max(\min) f(x_1,\dots,x_n) \quad \text{s.t. } g(x_1,\dots,x_n) = c$$
$$\mathscr{L}(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n) - \lambda[g(x_1,\dots,x_n) - c]$$

FOCs werden dann

$$\mathscr{L}_1'(x_1,\dots,x_n) = f_1'(x_1,\dots,x_n) - \lambda g_1'(x_1,\dots,x_n) = 0$$

... usw bis ...

$$\mathscr{L}_n'(x_1,\dots,x_n) = f_n'(x_1,\dots,x_n) - \lambda g_n'(x_1,\dots,x_n) = 0$$

Man hat dann n FOCs und eine Nebenbedingung mit deren Hilfe das Problem gelöst werden kann.

Lagrange mit mehreren Nebenbedingungen

$$\max(\min) f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{s.t.} \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ \ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m \end{cases}$$

$$\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(x_1, \ldots, x_n) - c_j]$$

$$\mathscr{L}_i' = f_i'(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Man hat dann n FOCs und m Nebenbedingungen, mit deren Hilfe das Problem gelöst werden kann.

7.3.7 Komparative Statik

Ein allgemeines ökonomisches Maximierungsproblem mit n Variabeln und m Nebenbedingungen kann folgendermassen formuliert werden:

$$\max(\min) f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } g_j(\mathbf{x}) = c_j, \quad j = 1, \ldots, m \tag{7.10}$$

Sei $\mathbf{x}^*$ eine Lösung des Problems (7.10). Im Allgemeinen ist $\mathbf{x}^*$ abhängig von $(c_1, \ldots, c_m) = \mathbf{c}$. Also schreibt man $x_i^* = x_i^*(\mathbf{c})$; x_i ist eine differenzierbare Funktion von $\mathbf{c}$. Weiter erhält man dann $f^* = f(\mathbf{x}^*)$ und somit ist f dann auch eine Funktion von $\mathbf{c}$. Also wenn $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ und $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ dann schreiben wir:

$$f^*(\mathbf{c}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{c})) = f(x_1^*(\mathbf{c}), \ldots, x_n^*(\mathbf{c}))$$

Ähnlich wie bei (7.9) können wir auch hier sagen:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{c})}{\partial c_i} = \lambda_i(\mathbf{c}), \quad i = 1, \ldots, m \tag{7.11}$$

Obige Bedingung sagt, dass wenn sich i-te Konstante c_i marginal ändert, dann ändert sich der Funktionswert f im Optimum um $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{c})$.

Mit (7.11) können wir nun weiter behaupten, dass

$$f^*(\mathbf{c} + \mathbf{dc}) - f^*(\mathbf{c}) \approx \lambda_1(\mathbf{c}) dc_1 + \ldots + \lambda_m(\mathbf{c}) dc_m,$$

wenn $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ um $\mathbf{dc} = (dc_1, \ldots, dc_m)$ verändert wird.

7.3.8 Das Enveloppen Theorem

$$\max(\min) f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \quad \text{s.t. } g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

Seien $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{r})$ die Lagrange-Multiplikatoren, wenn man obiges Problem mit den FOCs löst. Sei weiter

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r})$$

die korrespondierende Lagrange-Funktion. Dann darf man folgendes beaupten:

$$\frac{\partial f^*(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \left[\frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{x}, \mathbf{r})}{\partial r_i}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\mathbf{r})}, \quad i = 1, \ldots, k$$

Roys Identität

$$\max \; U(x_1, \ldots, x_n) \;\; s.t. \;\; x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n = m$$

Optimale Nachfrage nach Gut x_i wird dann:

$$x_i^* = x_i^*(\mathbf{p}, m)$$

Optimaler Nutzen (Indirekte Nutzenfunktion) wird zu

$$U^*(x_1^*(\mathbf{p}, m), \ldots, x_n^*(\mathbf{p}, m)) = U^*(\mathbf{p}, m)$$

Gemäss (7.11) darf man schreiben

$$\frac{\partial U^*}{\partial m} = \lambda$$

D.h. wenn das Einkommen mareginal erhöht wird, dann erhöht sich der Nutzen um λ. Somit ist λ der marginale Nutzen des Einkommens.

Die Lagrange-Funktion zum Problem in der Ausgangslage lautet:

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, m) = U(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{px} - m)$$

Mit Hilfe des Enveloppentheorems (7.3.8) kann man schreiben:

$$\frac{\partial U^*(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}, m)}{\partial p_i} = -\lambda x_i^*$$

Obige Gleichung nennt man **Roys Identität**: Der Nutzenverlust bei einem Anstieg des Preises von Gut i entspricht dem Engagement in diesem Gut gewichtet mit dem marginalen Nutzen des Einkommens λ.

Shepahards Lemma

$$\min C = rK + wL \;\; s.t. \;\; F(K, L) = Q$$

$\Longleftrightarrow$ Eine Firma will ihre Kosten C minimieren. Die Kosten des Kapitals K belaufen sich auf r. Die Kosten der Arbeit L belaufen sich auf w. Die Produktionsmöglichkeiten sind beschränkt durch die Produktionsfunktion $F(K, L) = Q$.

Die korrespondierende Lagrange-Funktion wird somit:

$$\mathscr{L}(K, L, r, w, Q) = rK + wL - \lambda(F(K, L) - Q)$$

Sei nun $C^* = C(r, w, Q)$ eine indirekte Kostenfunktion, welche die Kosten gegeben (r, w, Q) minimiert, dann ergibt die Anwendung des Enveloppentheorems (7.3.8):

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r} = K^* \quad \text{und} \quad \frac{\partial C^*}{\partial w} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = L^*$$

und diese beiden Bedingungen werden **Shepards Lemma** genannt. Weiter findet man:

$$\frac{\partial C^*}{\partial Q} = \lambda$$

Hinweis Kann zur Zeit Shepards Lemma nicht sinnvoll interpretieren.

7.3.9 Nicht lineare Optimierung

Ein allgemeines nicht lineares Optimierungsproblem sieht folgendermassen aus:

$$\max\ f(x_1, \ldots, x_n) \ \text{ s.t. } \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq c_1 \\ \ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq c_m \end{cases}$$

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, welches allen Nebenbedingungen genügt, wird **mögliche Menge** (feasible set) genannt.

Hinweis zur linearen Optimierung

* $\min\ f(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow \max\ -f(\mathbf{x})$
* $g_j(\mathbf{x}) \geq c_j \Longleftrightarrow -g_j(\mathbf{x}) \leq -c_j$
* $g_j(\mathbf{x}) = c_j \Longleftrightarrow g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \ \text{ und } \ -g_j(\mathbf{x}) \leq -c_j$

Somit wird es möglich viele Optimierungsprobleme in die Art eines solchen wie (7.3.9) zu bringen.

Das Lösungsrezept mit Kuhn-Tucker

$$\max\ f(\mathbf{x}) \ \text{ s.t. } \ g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \quad j = 1, \ldots, m$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sei zu lösen.

A. Schreibe den Lagrange auf

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(\mathbf{x}) - c_j]$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ als Lagrange Multiplikatoren, die sich auf die m Nebenbedingungen beziehen.

B. Setze alle FOCs von $\mathscr{L}(\mathbf{x})$ auf 0

$$\frac{\partial \mathscr{L}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}))}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

C. Stelle weitere Bedingung auf

$$\lambda_j \geq 0 \;\; (\lambda_j = 0 \;\text{ wenn } g_j(\mathbf{x}) < c_j), \quad j = 1, \ldots, m$$

D. Weiter soll $\mathbf{x}$ den Nebenbedingungen genügen

$$g_j(\mathbf{x}) \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, m$$

Dann geht es darum alle $\mathbf{x}$ zu finden, welche den Bedingungen B bis D genügen. Die gefundenen $\mathbf{x}$ sind dann allesamt Kandidaten, welche das Problem lösen könnten.

Erweiterung des KT-Lösungsrezepts

$$\max \;\; f(\mathbf{x}) \;\; \text{s.t.} \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \leq c_1 \\ \ldots\ldots\ldots, \quad x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \\ g_m(\mathbf{x}) \leq c_m \end{cases} \tag{7.12}$$

$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ kann ökonomisch so interpretiert werden, dass von jedem Gut i eine positive Menge nachgefragt wird.

Notwendige Bedingungen für (7.12) sind:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}))}{\partial x_i} \leq 0 \quad (= 0 \text{ wenn } x_i > 0)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (\lambda_j = 0 \text{ wenn } g_j(\mathbf{x}) < c_j), \quad j = 1, \ldots, m$$

Vermutung Obige Bedingungen sind notwendig aber nicht hinreichend. Gemäss meiner Vermutung wäre eine hinreichende Eigenschaft für eine eindeutige Lösung, dass die Lagrange-Funktion konkav ist - oder vielleicht auch konvex.

Kapitel 8

Integration

8.1 Das unbestimmte Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{wenn} \quad F'(x) = f(x) \tag{8.1}$$

8.1.1 Einige wichtige Integrale

$$\int x^a dx = \frac{1}{1+a} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1) \tag{8.2}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \tag{8.3}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq 0) \tag{8.4}$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0 \text{ und } a \neq 1) \tag{8.5}$$

8.1.2 Rechenregeln zum Integral

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad \text{(a ist eine Konstante)} \tag{8.6}$$

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{8.7}$$

$$\int [a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x)]\, dx = a_1 \int f_1(x)dx + \ldots + a_n \int f_n(x)dx \tag{8.8}$$

Ich denke man kann sagen, dass dieselben Regeln wie beim Umgang mit Summen herrschen.

8.2 Die Fläche und das bestimmte Integral

(Abb. Figur s. 312 im Sydsaeter - Figur 1 bis 4 wäre vollgeil!)

* t ist ein Punkt in $[a, b]$
* $A(t)$ ist die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ über dem Interval $[a, t]$
* $A(0) = 0$ und $A(b) = A$

$$f(t)\Delta t \leq A(t + \Delta t) - A(t) \leq f(t + \Delta t)\Delta t$$
$$f(t) \leq \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \leq f(t + \Delta t)$$

$\Delta t \to 0$

$$f(t) \leq A'(t) \leq f(t) \Longrightarrow A'(t) = f(t) \quad \forall t \in (a, b)$$

Sei nun $F(x) = \int f(x)dx$, dann gilt für irgendeine Konstante C

$$A(x) = F(x) + C \text{ und } A(a) = 0 = F(a) + C \Longrightarrow C = -F(x)$$

und somit

$$A(x) = F(x) - F(a) \quad \text{wobei} \quad F(x) = \int f(x)dx \tag{8.9}$$

Sei $G(x)$ eine andere Funktion mit $G'(x) = f(x)$, dann gilt $G(x) = F(x) + C$ für irgendeine Konstante C und

$$G(x) - G(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = F(x) - F(a)$$

Und damit weiss man, dass es egal ist, welches unbestimmte Integral von f verwendet wird, um die Fläche mittels (8.9) zu berechnen.

8.2.1 Definition des bestimmten Integrals

$$\int\limits_a^b f(x)dx = |F(x) = F(b) - F(a)$$
$$\text{wobei } F \text{ irgendeine Funktion, die } F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in (a, b) \text{ genügt} \tag{8.10}$$

Das bestimmte und das unbestimmte Integral unterscheiden sich stark. Während das bestimmte Integral einer Zahl entspricht, entspricht das unbestimmte Integral einer unbegrenzten Menge von Funktionen.

Wen $f(x) \leq 0$ für ein Intervall $[a, b]$, dann muss das bestimmte Integral mit -1 multipliziert werden, damit man eine positive Zahl erhält.

8.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \tag{8.11}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{8.12}$$

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad (\alpha \text{ beliebig}) \tag{8.13}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \tag{8.14}$$

$$\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \tag{8.15}$$

Diese Eigenschaften können mit Hilfe der Definition des bestimmten Integrals (8.10) leicht gezeigt werden.

8.3.1 Differenzierung bezüglich den Schranken des Integrals

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = (F(t) - F(a))' = F'(t) = f(t) \tag{8.16}$$

$$\frac{d}{dt}\int_t^a f(x)dx = (F(a) - F(t))' = -F'(t) = -f(t) \tag{8.17}$$

(8.16) und (8.17) zusammen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx &= \left[F\left(b(t)\right) - F\left(a(t)\right)\right]' \\ &= F'\left(b(t)\right) b'(t) - F'\left(a(t)\right) a'(t) \\ &= f(b)b'(t) - f(a)a'(t) \end{aligned} \tag{8.18}$$

Stetige Funktionen sind integrierbar: Man kann anscheinend zeigen, dass stetige Funktionen integrierbar sind. Folgende Funktionen sind nur integrierbar, wenn spezielle neue Funktionen eingefürhrt werden.

$$\int e^{x^2} dx, \int e^{-x^2} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{1}{\ln x} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

8.3.2 Das Riemann Integral

So wie das Integral in Abschnitt 8.2.1 definiert wurde, handelt es sich um ein Newton-Leibniz-Integral. Das Riemann-Integral ist wie folgt definiert:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$
$$\xi_i \text{ ist irgedneine Zahl aus } [x_i, x_{i+1}]$$

Das Riemann Integral schaut dann folgendermassen aus:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

8.4 Anwendungen in der Ökonomie

8.4.1 Einkommensverteilung

(Abb. 15 siehe Beiblatt)

r Ein Einkommen im Intervall (a, b)

$F(r)$ Ist der Anteil an der Bevölderung mit Einkommen $\leq r$

$nF(r)$ Anzahl der Leute in der Bevölderung mit Einkommen $= r$

$f(r)$ Ist Anteil an der Bevölderung mit Einkommen $= r$

$nf(r)$ Anzahl der Leute in der Bevölkerung mit Einkommen $= r$

$$nf(r)\Delta r \leq nF(r + \Delta r) - nF(r) \leq nf(r + \Delta r)\Delta r$$

$$nf(r) \leq \frac{nF(r + \Delta r) - nF(r)}{\Delta r} \leq nf(r + \Delta r)$$

$\Delta r \to 0$

$$nf(r) \leq nF'(r) \leq nf(r) \Longrightarrow nF'(r) = nf(r)$$

Und somit ist die Anzahl Leute in der Bevölkerung mit Einkommen $\leq r$:

$$\int_0^r nf(r)dr = n\int_0^r f(r)dr \quad \text{oder}$$

Anzahl der Leute in der Bevölderung mit Einkommen im Intervall (a, b) somit

$$n\int_a^b f(r)dr \tag{8.19}$$

$M(r)$ Total des Einkommens aller Leute zusammen, bei denen gilt: Einkommen $\leq r$

Gesammtes Einkommen der Leute, welche ein Einkommen im Intervall $[r, r + \Delta r]$ erzielen wird dann:

$$nr\,[F(r + \Delta r) - F(r)] \leq M(r{+}\Delta r){-}M(r) \leq n(r{+}\Delta r)\,[F(r + \Delta r) - F(r)]$$

$$nr\frac{[F(r + \Delta r) - F(r)]}{\Delta r} \leq \frac{M(r + \Delta r) - M(r)}{\Delta} \leq n(r{+}\Delta r)\frac{[F(r + \Delta r) - F(r)]}{\Delta r}$$

$r \to 0$

$$nrf(r) \leq M'(r) \leq nrf(r) \Longrightarrow M'(r) = nrf(r)$$

Somit ist gesamtes Einkommen der Leute, welche Einkommen im Intervall $[a, b]$ haben:

$$n \int_a^b rf(r)dr \tag{8.20}$$

Aus (8.19) und (8.20) errechnet sich sodann das Durchschnittseinkmmen der Individuen, welche im Intervall $[a, b]$ Einkommen erzielen.

$$\frac{\int_a^b rf(r)dr}{\int_a^b f(r)dr}$$

8.5 Partielle Integration

Es ist bekannt, dass

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

und damit

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)$$

daraus folgt die Formel für partielle Integration

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{8.21}$$

8.6 Integration durch Substitution

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad (u = g(x)) \tag{8.22}$$

Hinweis:

$$\int f(u)du = F(u){+}C \Rightarrow [F(g(x)) + C]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

8.6.1 Berücksichtigung von Limiten

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \quad (u = g(x))$$

Hinweis: Sei $F'(u) = f(u)$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = |F(g(x)) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

8.7 Infinite Intervalle der Integration

Wenn das Integral ein Limit hat, wenn $b \to \infty$ (und dieses auch finit ist), dann sagt man, f ist integrierbar über $[a, \infty]$ und man definiert

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{8.23}$$

Man sagt dann, dass das Integral (8.23) konvergiert, sonst divergiert es.

Analog für Funktion f, welche stetig über $(-\infty, b)$ ist.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{8.24}$$

Kapitel 9

Differentialgleichungen

9.1 Die einfachste Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t) \Longleftrightarrow x(t) = \int f(t)dt + C$$

$x(t) = \int f(t)dt + C$ wird allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{x}(t) = f(t)$ genannt.

9.2 Das Gesetz des natürlichen Wachstums

Das BIP der Schweiz wachse mit 5 %. Diese relative Änderungsrate werde mit r bezeichnet. Das BIP werde mit $x(t)$ bezeichnet. Somit:

$$\dot{x}(t) = rx(t) \tag{9.1}$$

(9.1) wird Gesetz des natürlichen Wachstums genannt und hat die Lösung:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = rx(t), \quad x(0) = x_0 \Longleftrightarrow x(t) = x_0 e^{rt} \quad \text{weil} \\
&\frac{\dot{x}}{x} = r = \frac{d}{dt}\ln x, \quad \text{somit: } \ln x = \int r dt = rt + C \\
&\Longrightarrow x(t) = e^{rt+C} = e^{rt}\underbrace{e^C}_{x_0} = x_0 e^{rt}
\end{aligned}$$

9.3 Wachstum bis zu einer oberen Schranke

Annahmen Sei $x(t)$ die Bevölkerungsanzahl im Zeitpunkt t, sei K die maximale Bevölkerungszahl und sei a die relative Bevölkerungswachstumsrate. Sei $\dot{x}(t)$ die Wachstumsrate der Bevölkerung und sei die Bevölkerungswachstumsrate proportional zu Abweichung der aktuellen Bevölkerungszahl von der Bevölkerungsschranke. Dann modelliert man dies wie folgt:

$$\dot{x}(t) = a(K - x(t)) \tag{9.2}$$

$$\text{Sei} \quad u(t) = K - x(t) \Longrightarrow \dot{u}(t) = -\dot{x}(t) \tag{9.3}$$

(9.2) und (9.3)

$$\dot{u}(t) = -au(t) \Longleftrightarrow u(t) = e^{-at}e^{C} = Ae^{-at} \tag{9.4}$$

(9.3) und (9.4)

$$Ae^{-at} = K - x(t) \Longleftrightarrow x(t) = K - Ae^{-at}$$

Sei $x(0) = x_0 \Longrightarrow x_0 = K - A \Longleftrightarrow A = K - x_0$ und somit

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = a(K - x(t)),\ x(0) = x_0 \\ &\Longleftrightarrow x(t) = K - (K - x_0)e^{-at} \end{aligned} \tag{9.5}$$

9.4 Logistisches Wachstum

(Figur 1 und Figur 2 s.343 im Sydsaeter)

Ausgangslage: $\dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$

Lösung: $x(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$ (A ist eine Konstante).
Sydsaeter beweist obiges auf s. 344 in seinem Buch.

9.5 Einfache Differentialgleichungen und deren Lösung

$$\dot{x} = ax\ \forall t \Longleftrightarrow x = Ae^{at} \quad \text{(für eine Konstante A)} \tag{9.6}$$

$$\dot{x} + ax = b\ \forall t \Longleftrightarrow x = Ae^{-at} + \frac{b}{a} \quad \text{(für eine Konstante A)} \tag{9.7}$$

$$\dot{x} + ax = bx^2\ \forall t \Longleftrightarrow x = \frac{a}{b - Ae^{at}} \quad \text{(für eine Konstante A)} \tag{9.8}$$

Kapitel 10

Zinsraten und Gegenwartswerte

10.1 Diskrete Verzinsung bei mehreren Zinsterminen

S_t Wert des Kapitals in Zeitpunkt t=t

S_0 Wert des Kapitals in Zeitpunkt t=0

p Zinssatz pro Periode (meistens ein Jahr) in %

r $p/100$

t Anzahl Perioden

Von nun an entspricht eine Periode einem Jahr. Der Zinssatz r bezieht sich auf ein Jahr.

$S_t = S_0(1+r)^t$ Wert des Kapitals nach t Jahren.

$S_0(1+\frac{1}{2})$ Wert des Kapitals nach halbem Jahr, wenn zweimal pro Jar eine Zinszahlung erfolgt.

Somit Wert des Kapitals nach einem Jahr, wenn zweimal pro Jahr eine Zinszahlung erfolgt:

$$S_0(1+\frac{r}{2})(1+\frac{r}{2}) = S_0(1+\frac{r}{2})^2$$

Allgemeiner Fall für $t = 1$

n Anzahl der Zinszahlungen, die pro Jahr erfolgen.

$$S_0 \underbrace{(1+\frac{r}{n})(1+\frac{r}{n})\dots(1+\frac{r}{n})}_{\text{n mal}} = S_0(1+\frac{r}{n})^n$$

Allgemeiner Fall für $t = t$

$$S_0 \underbrace{(1+\frac{r}{n})^n}_{\text{1. Jahr}} \underbrace{(1+\frac{r}{n})^n}_{\text{2. Jahr}} \dots \underbrace{(1+\frac{r}{n})^n}_{\text{t. Jahr}} = S_0(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

Hinweis: Wenn einmal pro Jahr verzinst wird, dann vereinfacht sich die Formel auf $S_0(1+r)^t$

10.2 Stetige Verzinsung

Gemäss Abschnitt 6.14.3 gilt $\lim_{h \to 0}(1+h)^{1/h} = e$

$$S_0(1+\frac{r}{n})^{nt} = S_0(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}rt}$$

$$n \to \infty \Longrightarrow \frac{r}{n} \to 0 \text{ und somit}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_0(1+\frac{r}{n})^{nt} = S_0 e^{rt} = S(t) \tag{10.1}$$

Wobei r c.c.p.a, d.h. r wird stetig verzinst und bezieht sich auf ein Jahr.

10.3 Der Gegenwartswert

PDV steht für Gegenwartswert (Present Discounted Value); K ist das was PDV in $t=0$ ist in $t=t$; r ist der Zinssatz bezüglich einem Jahr; n sind die Anzahl Zinszahlungen bei der diskreten Verzinsung.

10.3.1 Diskrete Welt

$$PDV = K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}$$

10.3.2 Stetige Welt

$$PDV = Ke^{-rt}$$

10.4 Annuitäten

10.4.1 Gegenwartswert einer Annuität

- a Zahlung pro Periode
- n Anzahl Perioden
- p Zinssatz pro Periode in %
- r $p/100$
- P_n Gegenwartswert der Annuität a

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} a\frac{1}{(1+r)^i} = \frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right] \tag{10.2}$$

Herleitung Gemäss der Formel für die finite geometrische Reihe (4.1) gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} = a\frac{k^n - 1}{k-1} \quad \text{k} \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a\frac{1}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^{n} ak^i \quad \text{mit } k = (1+r)^{-1} \tag{10.3}$$

(10.3) geteilt durch k

$$\sum_{i=1}^{n} a\frac{k^i}{k} = \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} \quad \text{und somit}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a\frac{1}{(1+r)^i} &= \frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n} a\frac{1+r}{(1+r)^i} = \frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n} a\frac{1}{(1+r)^{i-1}} \\ &= \frac{1}{1+r}a\frac{(1+r)^{-n}-1}{(1+r)^{-1}-1} = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]\end{aligned}$$

10.4.2 Zukunftswert einer Annuität

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} a(1+r)^{i-1} = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Herleitung Man beachte wiederum, dass wie oben gemäss (4.1) gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a(1+r)^{i-1} &= \sum_{i=1}^{n} ak^{i-1} \quad \text{mit } k = (1+r) \\ &= a\frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1} = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]\end{aligned}$$

10.4.3 Gegenwarts- und Zukunftswert von stetigen Geldströmen

$P(t)$ Sei der Present Discounted Value (PDV) von Geldströmen über dem Intervall $[0,t]$

$f(t)$ Geldstrom über dem Intervall $[0,T]$

$P(t+\Delta t) - P(t)$ Alle Geldstrüme vom Intervall $[t, t+\Delta t]$ zusammengezählt

$P(T)$ Geldmenge, welche einem stetigen Geldfluss f(t) über dem Intervall $[0,T]$ per heute entspricht.

r Stetig verzinste Zinsrate pro Jahr

Gegenwartswert eines stetigen Geldstroms

Wenn Δt sehr klein ist, kann man näherungsweise behaupten:

$$P(t+\Delta t) - P(t) \approx f(t)e^{-rt}\Delta t \quad \text{und somit}$$

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx f(t)e^{-rt} \quad \Delta t \to 0$$

$$P'(t) = f(t)e^{-rt}$$

Wegen $P(T) - P(0) = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$ (Definition des bestimmten Integrals) und P(0)=0 folgt somit:

$$PDV = \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$$

Zukunftswert eines stetigen Geldstromes

Will man nun wissen, was der Geldhaufen von oben (10.4.3) in Zukunft, im Zeitpunkt T für einen Wert hat, so rechnet man:

$$FDV = e^{rT}\int_0^T f(t)e^{-rt}dt = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}dt$$

Mir ist nicht klar, wieso man nicht $\int_0^T f(t)e^{rt}dt$ rechnet.

Abdiskontierter Wert eines stetigen Geldstromes

Der abdiskoniterte Wert eines stetigen Geldstromes der Art $f(t)$ Geldeinheiten pro Jahr über einem Intervall $[s,T]$ mit stetigem Zins von r pro Jahr berechnet sich als:

$$DV = \int_{t=s}^T f(t)e^{-r(t-s)}dt$$

Herleitung Kann ich leider noch nicht ganz nachvollziehen. Allgemein habe ich alle obigen Integrale, so wie sie auf den Seiten 365ff im Sydsaeter erläuterte werden nicht ganz kapiert.

Rückzahlung einer Schuld in Raten

In Abschnitt (10.2) wird gezeigt, dass:

$$P_n = \sum_{i=1}^n a\frac{1}{(1+r)^i} = \frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

In Worten bedeutet dies, dass Ratenzahlungen von a über n Perioden bei einem Zinssatz r pro Periode heute einem Wert von P_n entsprechen.

Nun kann man den Spiess umdrehen und sagen, dass eine Schuld von heute im Umfang von P_n über die nächsten n Perioden abgezahlt werden kann. (10.4.3) wird dafür lediglich nach a aufgelöst:

$$a = \frac{rK}{1-(1+r)^{-n}}, \quad \text{wobei } K = P_n$$

Berechnung Anzahl Rückzahlungsperioden

Gegeben a und K kann man auch angeben, über wieviele Perioden n Ratenzahlungen zu erfolgen haben:

$$n = \frac{\ln a - \ln(a - rK)}{\ln(1+r)}, \quad \text{weil}$$

$$\frac{rK}{a} = 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1+r)^n} = 1 - \frac{rK}{a} = \frac{a-rK}{a} \Longleftrightarrow (1+r)^n = \frac{a}{a-rK}$$

10.5 IRR: Internal Rate of Return

Die IRR ist derjenige Zinssatz, welcher - gegben $A, a_0, \ldots, a_n$ - das folgende Problem löst:

$$A = a_0 + \frac{a_1}{(1+r)} + \frac{a_2}{(1+r)^2} \ldots + \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

Wenn zwei Projekte je eine eindeutige IRR haben, dann wird dasjenige Projekt mit der gösseren IRR bevorzugt.

Kapitel 11

Funktionen mit mehreren Veränderlichen

11.1 Funktionen mit zwei Veränderlichen

11.1.1 Definition einer Funktionen mit zwei Veränderlichen

Eine Funktion f von zwei Variabeln x und y mit einem Definitionsbereich D ist eine Regel, welche jedem Punkt in D eine spezifische Nummer $f(x,y)$ zuordnet.

11.1.2 Partielle Ableitung einer Funktionen mit zwei Veränderlichen

Formale Definition

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \tag{11.1}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} \tag{11.2}$$

Wenn der Limes von (11.1) oder (11.2) nicht existiert, dann sagt man, dass $z = f(x,y)$ nicht differenzierbar ist bezüglich x oder y in einem bestimmten Punkt.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Hinweis

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = z''''_{yyyz},$$

d.h. z wird zuerst dreimal nach y abgleitet und dannach einmal nach x.

11.1.3 Ebenen und Distanzen

Allgemeine Gleichung für eine Ebene im Raum

$$ax + by + cz = d \tag{11.3}$$

Mit Hilfe von (11.3) kann man eine Budgetbeschränkung modellieren:

m Verfügbares Einkommen
p, q, r Preise für die drei verschiedenen Güter
x, y, z Konsumierte Einheiten der verschiedenen Güter

$$B = \{(x, y, z) : px + qy + rz \leq m, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$$

(Abb.: Figur 1 s. 395 im Sydsaeter)

Eine Deinition der Distanz im Raum

Die Distanz zwischen den beiden Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) kann unter anderen Möglichkeiten definiert werden als:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{11.4}$$

Die Kugelgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

wobei das Zentrum der Kugel in (a, b, c) liegt und der Radius der Kugel r beträgt.

11.1.4 Funktionen mit mehreren Variabeln

Eine Funktion f mit n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ auf dem Definitionsbereich D ist eine Regel, die jedem n-Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in D eine Nummer in der Art $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ zuordnet.

Stetigkeit

Irgendeine Funktion mit n Variabeln, die aus stetigen Funktionen mittels Kombination von Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und funktionaler Komposition zusammengestellt werden kann, ist selbst wieder eine stetige Funktion auf dem jeweiligen Definitionsbereich.

11.1.5 Partielle Ableitungen bie mehreren Variablen

Wenn $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, dann *bedeutet*
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ für $i = 1, 2 \ldots, n$
partielle Ableitung von $f(x_1, \ldots, x_n)$ bezüglich x_i
wenn alle anderen x_j $(i \neq j)$ konstant gehalten werden.

Die Hesse-Matrix

$$\nabla^2 f(x) = \big(f_{x_i x_j}(x)\big) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \quad i, j = 1, 2, \ldots n$$

Formale Definition der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Wenn $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine stetige erste partielle Ableitung auf einem Definitionsbereich von D hat, dann nennt man f stetig differenzierbar auf dem Definitionsbereich D.

Kapitel 12

Werkzeuge der komparativen Statik

12.1 Die Allgemeine Kettenregel

$$\begin{aligned} &z = F(x_1, \ldots, x_n) \\ &x_1 = f_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, x_n = f_n(t_1, \ldots, t_n) \end{aligned} \tag{12.1}$$

In Vektorschreibweise kann (12.1) kurz als $F(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ geschrieben werden.

Gegeben eine Funktion wie in (12.1), dann lautet die allgemeine Kettenregel wie folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{12.2}$$

12.1.1 Anwendung der allgemeinen Kettenregel

Beispiel 1

$$z = F(x, y) \quad \text{mit} \quad x = f(t) \quad \text{und} \quad y = g(t)$$
$$\frac{dz}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt}$$

Beispiel 2

$$z = F(x, y) \quad \text{mit} \quad x = f(t, s) \quad \text{und} \quad y = g(t, s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s}$$

Beispiel 3: Implizite Differentiation

* $F(x, y, z) = c$ (c ist eine Konstante)
* $z = f(x, y) \,\forall\, (x, y) \in A$ eine implizite Funktion, welche $F(x, y, z) = c$ genügt.
* $u = F(x, y, z)$ mit $x = f_1$, $y = f_2$, $z = f_3(x, y)$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial z} \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial z} \end{aligned} \tag{12.3}$$

Mit (12.3) ist es möglich $\partial z/\partial x$ resp. $\partial z/\partial y$ zu bekommen, selbst wenn es nicht möglich ist, $F(x, y, z) = c$ exlplizit nach $z = f(x, y)$ aufzulösen.

Beispiel 4: Allgemeiner Fall der Impliziten Differentiation

* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c$ (c ist eine Konstante)
* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ eine implizite Funktion, welche $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c$ genügt.

$$\begin{aligned} &0 = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z} \\ &i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{12.4}$$

12.2 Substitutionselastizität

(Abb.: Figur 2 s.431 im Sydsaeter)

$z = F(x, y) = c$ und $y = f(x) \;\forall\; x \in I$ eine implizite Funktion

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} \Longleftrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{12.5}$$

Sei nun $\frac{\partial y}{\partial x} = a \Longleftrightarrow \partial y = \partial x a$

Seien x und y Inputfaktoren und $F(x, y)$ ein Produkt, dass mit x und y hergestellt wird, dann bedeutet $\partial y = \partial x a$, dass wenn x um 1 reduziert wird, y um a erhöht werden muss, um immer noch c Einheiten des Produktes herstellen zu können.

12.2.1 Die Substitutionselastitzität

Die MRS (Marginal Rate of Substitution) ist definiert als:

$$|\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}| = R_{yx} \tag{12.6}$$

vgl. (12.5)

Definition der Substitutionselastizität Wenn $F(x, y) = c$, dann ist die Substitutionselastizität zwischen y und x

$$\sigma_{yx} = El_{R_{yx}} \left(\frac{y}{x}\right) \tag{12.7}$$

σ_{yx} ist die prozentuale Änderung von y/x, wenn sich R_{yx} um 1 % erhöht.

Ein Beispiel für $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$

$$R_{KL} = \frac{F_L}{F_K} = \frac{A\beta K^\alpha L^{\beta-1}}{A\alpha K^{\alpha-1} L^\beta} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$$

$$\left(\frac{K}{L}\right) = R_{KL}\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{und somit}$$

$$\sigma_{KL} = \frac{R_{KL}}{R_{KL}\frac{\alpha}{\beta}}\frac{\alpha}{\beta} = 1$$

vgl. (6.17) über die Elastizität

12.3 Homogene Funktionen mit zwei Veränderlichen

Man sagt von einer Funktion $f(x, y)$, die einen Definitionsbereich von D hat, dass sie homogen vom Grade k ist, wenn

$$\forall\ (x, y) \in D: \ f(tx, ty) = t^k f(x, y)\ \forall\ t > 0$$

12.3.1 Satz von Euler

$$\begin{gathered} f(x, y) \text{ ist homogen vom Grade } k \\ \Longleftrightarrow x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = k f(x.y) \end{gathered} \tag{12.8}$$

Weitere Eigenschaften, wenn $f(x, y)$ homogen vom Grade k sind:

$$\begin{gathered} f_x(x, y) \quad \text{und} \quad f_y(x, y) \\ \text{sind beide homogen vom Grade } k-1 \end{gathered} \tag{12.9}$$

$$f(x, y) = x^k f(1, y/x) = y^k f(x/y, 1) \quad (\text{für } x > 0,\ y > 0) \tag{12.10}$$

$$x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = k(k-1) f(x, y) \tag{12.11}$$

Beweise für obige Eigenschaften findet man im Sydsaeter s. 434.

12.3.2 Geometrische Aspekte von homogenen Funktionen

(Abb.: Zeichne Figure 3 (Indifferenzkurven) mit Hilfe der Homogenitätseigenschaften s. 436 im Sydsaeter, schreibe Eigenschaft (**) im Sydsaeter dazu)

12.4 Homogene und homothetische Funktionen im allgemeinen Fall

12.4.1 Homogenität vom Grade k

Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ definiert auf D. Wenn $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ und $t > 0$, dann $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in D$. f ist dann homogen vom Grade k, wenn

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n) \; \forall \; t > 0$$

k kann irgendeine Zahl sein: positiv, Null oder negativ.

12.4.2 Der allgemeine Fall vom Satz von Euler

Sei f eine differenzierbare Funktion von n Variabeln auf einem offenen Definitionsbereich D, wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ und $t > 0$ implizieren, dass $t\mathbf{x} \in D$. Dann ist f genau dann homogen vom Grade k in D, wenn die folgende Gleichung $\forall \; \mathbf{x} \in D$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \tag{12.12}$$

12.4.3 Eine Version von obiger Euler-Gleichung

$$El_{x_1} f(\mathbf{x}) + El_{x_2} f(\mathbf{x}) + \ldots + El_{x_n} f(\mathbf{x}) = k$$

Wobei $El_{x_i} f(\mathbf{x}) = (x_i/f(\mathbf{x}))f_{x_i}(\mathbf{x})$ die partielle Elastizität ist.

12.4.4 Eigenschaften von allgemeinen homogenen Funktionen

Wenn $f(\mathbf{x})$ homogen vom Grade k ist, dann

$$\begin{aligned} &(i) \; f_{x_i}(\mathbf{x}) \text{ ist homogen vom Grade } k-1, \; i = 1, 2, \ldots, n \\ &(ii) \; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = k(k-1)f(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{12.13}$$

Beweise Leider auch hier keine tollen Beweise. Vielleicht werde ich das irgendwann nachholen.

12.4.5 Homothetische Funktionen

Definition Sie $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ definiert im Konus/Kegel K. Dann nennt man f homothetisch, falls

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \; f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}), \; t > 0 \\ &\Longrightarrow \\ &f(t\mathbf{x}) = f(t\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Hinweis Wenn eine Funktion nicht homogen ist, dann folgt **nicht zwingend**, dass diese Funktion auch nicht homothetisch ist.

Definition Konus/Kegel D ist ein Konus, wenn gilt:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D \text{ und } t > 0$$
$$\implies (tx_1, \ldots, tx_n) \in D$$

12.5 Lineare Approximationen

12.5.1 Einführung einer neuen Notation

$$f_1'(x,y) = f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
$$f_2'(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

12.5.2 Lineare Approximation

Die Lineare Approximation von $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ an der Stelle $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ist

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x^0}) + f_1'(\mathbf{x^0})(x_1 - x_1^0) + \ldots + f_n'(\mathbf{x^0})(x_n - x_n^0)$$

12.5.3 Tangentialebene

Die Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ hat die Gleichung

$$z - z_0 = f_1'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

12.6 Das Differential

Das differential einer Funktion $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit n Variabeln ist definiert als

$$dz = df = f_1'(\mathbf{x})dx_1 + f_2'(\mathbf{x})dx_2 + \ldots + f_n'(\mathbf{x})dx_n$$

12.6.1 Rechenregeln für das Differential

Gegeben $f(x_1, \ldots, x_n)$ und $g(x_1, \ldots, x_n)$

$$d(af + bg) = adf + bdg$$
$$d(fg) = gdf + fdg$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad \text{g} \neq 0$$

Anmerkung Ich glaube, die folgende Regel sollte auch gelten:

$$z = g(f(x, y)) \Longrightarrow dz = g'(f(x, y))df$$

12.7 Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{12.14}$$

(12.14) ist ein Gleichungssystem mit n Variabeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und m unabhängigen Gleichungen.

12.7.1 Freiheitsgrade

Ein Gleichungssystem mit n Variabeln hat k Freiheitsgrade, wenn k Variabeln frei gewählt werden können, während $n - k$ vollständig bestimmt sind, wenn k Variablen spezielle Werte erhalten haben.

12.7.2 Allgemeine Struktur von ökonomischen Modellen

Gegeben sei das Gleichungssystem wie in (12.14) oben.

$x_1, \ldots, x_n$ Seien exogene Variabeln, welche ich mir wie Knöpfe vorstelle, an welchen gedreht werden kann.

$y_1, \ldots, y_m$ Seien endogene Variabeln, die sich verändern, wenn an den Knöpfen gedreht wird.

Wenn

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

formuliert werden kann - was häufig unmöglich ist - dann nennt man dies die reduzierte Form des strukturellen Gleichungssystems.

Kapitel 13

Lineare Algebra

13.1 Matizen und Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man sagt, $\mathbf{A}$ habe die Ordnung $m \times n$. a_{ij} ist dasjenige **Element** der Matrix $\mathbf{A}$, welches in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte liegt. $\mathbf{A}$ kann dann auch als $(a_{ij})_{m\times n}$ geschrieben werden.

13.1.1 Summe zweier Matrizen

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei Matrizen, dann ist die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definiert als:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

13.1.2 Multiplikation mit einem Scalar

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

13.1.3 Matrix-Rechenregeln: Addition und Multiplikation mit Scalaren

$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ seien $m \times n$-Matrizen. α und β seien relle Zahlen. $\mathbf{0}$ ist eine $m \times n$-Matrix, die nur aus Nullen besteht.

$$\begin{array}{ll} (a) & (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ (b) & \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (c) & \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \\ (d) & \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \\ (e) & (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \\ (f) & \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \end{array}$$

13.1.4 Matrix-Multiplikation

Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times p}$, dann ist das Produkt von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$=$\mathbf{AB}$, eine $m \times p$-Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times p}$, dessen Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte das innere Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

von der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ ist.

Matrix-Rechenregeln zur Multiplikation

$$\begin{array}{ll} (a) & (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \\ (b) & \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} \\ (c) & (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC} \end{array}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \\ (b) & \mathbf{AB} = 0 \not\Longrightarrow \mathbf{A} = 0 \ \text{ oder } \ \mathbf{B} = 0 \\ (c) & \mathbf{AB} = \mathbf{AC} \ \text{ und } \mathbf{A} \neq 0 \not\Longrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C} \end{array}$$

Potenz einer Matrix

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{\text{n mal}}$$

13.2 Gleichungssysteme in Matrix-Notation

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

13.2.1 Die Einheitsmatrix

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Oben ist die Einheitsmatrix nicht allzuschön dargestellt. Die Einsen müssen in der Diagonalen sein und sonst alles Nullen.

Die Einheitsmatrix ist die einzige Matrix, welche die Eigenschaft (13.1) besitzt:

$$\mathbf{AI}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A} \ \text{ für jede } n \times n\text{-Matrix } \mathbf{A} \tag{13.1}$$

13.2.2 Die Transponierte einer Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Transponierte

$$\begin{array}{ll} (a) & (\mathbf{A}')' = \mathbf{A} \\ (b) & (\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \\ (c) & (\alpha\mathbf{A})' = \alpha\mathbf{A}' \\ (d) & (\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \end{array}$$

Symmetrische Matrizen

$$\text{Matrix } \mathbf{A} \text{ ist symmetrisch} \Longleftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}'$$

13.2.3 Vektoren

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ wird Vektor genannt. $a_1, \dots, a_n$ werden Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$ genannt.

Vektoroperationen

$$(a) \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \forall\ i \text{ gilt } a_i = b_i$$

$$(b) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad t \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ta_n \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \text{Differenz zweier Vektoren:} \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$$

Die Linearkombination

Seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ Vektoren und t und s reelle Zahlen, dann nennt man

$$t\mathbf{a} + s\mathbf{b} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ta_n + sa_n \end{pmatrix}$$

eine Linearkombination der beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Häufig wird einer der beiden Vektoren transponiert aufgeschrieben, dann entspricht das Skalarprokukt gerade dem Matrix-Produkt.

Beispiel

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt Seien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ n-Vektoren und α ein Skalar, dann gilt

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ (b) & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ (c) & (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ (d) & \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \end{array}$$

Die Euklid'sche Norm

Sei $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein Vektor, dann nennt man

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

die Euklid'sche Norm von Vektor $\mathbf{a}$.

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichheit

Sei $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dann gilt:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||$$

Orthogonalität

Sind zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ senkrecht aufeinander, so schreiben wir $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ und es gilt

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

Hinweis

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{b}||}, \quad (\theta \in [0,\pi]) \tag{13.2}$$

θ ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren **a** und **b**. In der Statistik nennt man (13.2) Korrelationskoeffizient.

(Abb.: Figure 7 s. 583 im Sydsaeter)

Beispiel Seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ n Beobachtungen. Die statistischen Mittelwerte sind dann

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Sei $\mathbf{a} = (x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})$ und $\mathbf{b} = (y_1 - \bar{y}, \ldots, y_n - \bar{y})$, dann ist (13.2) gerade der Korrelationskoeffizient zwischen x und y:

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{b}||} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})\sum(y_i-\bar{y})} = \rho$$

$$\begin{aligned} \rho = 1 &\Longleftrightarrow \text{Perfekte Korrelation} \\ \rho > 0 &\Longleftrightarrow \text{Positive Korrelation} \\ \rho < 0 &\Longleftrightarrow \text{Negative Korrelation} \\ \rho = 0 &\Longleftrightarrow \text{Keine Korrelation} \end{aligned}$$

13.2.4 Geraden und Ebenen

Die Gerade im Raum

Seien **a** und **b** Vektoren im $\mathbb{R}^n$, dann können alle Punkte **x**, welche auf einer Geraden liegen, welche durch die Punkte **a** und **b** geht beschrieben werden als

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \text{ eine reelle Zahl}$$

Hinweis

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}-\mathbf{a} \quad \text{Vektor von a nach b} \\ &t = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a} \\ &t = 1 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

Die Hyperebene

Sei H eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die durch den Punkt $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ geht. Sei weiter $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ orthogonal zu H, dann sind alle Punkte $\mathbf{x}$ der Hyperebene charakterisiert durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

13.3 Determinanten

13.3.1 Determinante einer $n \times n$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{ij}C_{ij} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

C_{i1} Streiche bei Matix $\mathbf{A}$ i-te Zeile und erste Spalte und erhalte Matrix C_{i1}

C_{i2} Streiche bei Matix $\mathbf{A}$ i-te Zeile und zweite Spalte und erhalte Matrix C_{i2}

Vorzeichen von C_{ij} $(-1)^{i+j}$

Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{ij}C_{ij} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

C_{1j} Streiche bei Matix $\mathbf{A}$ j-te Spalte und erste Zeile und erhalte Matrix C_{1j}

C_{2j} Streiche bei Matix $\mathbf{A}$ j-te Spalte und zweite Zeile und erhalte Matrix C_{2j}

Vorzeichen von C_{ij} $(-1)^{i+j}$

Anwendung der Entwicklungsregel auf 2×2-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$|\mathbf{A}| = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{i=1,j=1} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{i=1,j=2}$$

Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$|\mathbf{A}| = -\underbrace{a_{12}a_{21}}_{i=1,j=2} + \underbrace{a_{22}a_{11}}_{i=2,j=2}$$

Anwendung der Entwicklungsregel auf 3×3-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{i=1,j=1} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{i=1,j=2} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{i=1,j=3}$$

Rechenregeln zu Determinanten

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix.

A. Wenn alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) von $\mathbf{A}$ Null sind, dann gilt $|\mathbf{A}| = 0$.

B. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$ wobei $|\mathbf{A}|'$ die Transponierte von $|\mathbf{A}|$ ist.

C. Wenn alle Elemente einer einzigen Zeile (oder Spalte) von $\mathbf{A}$ mit einer Zahl α multipliziert werden, dann wird auch die Determinante von $\mathbf{A}$ mit α multipliziert.

D. Werden zwei Zeilen (oder Spalten) einer Matrix miteinander vertauscht, dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Der Betrag der Determinanten bleibt unverändert.

E. Wenn eine Zeile (oder Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) ist, dann gilt $|\mathbf{A}| = 0$.

F. Die Determinante von $\mathbf{A}$ bleibt unverändert, wenn zu einer Zeile (oder Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) dazugezählt wird.

G. Sei $\mathbf{B}$ eine weitere $n \times n$-Matrix, dann gilt: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

H. $|\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n|\mathbf{A}|$, wobei α eine reelle Zahl ist.

13.3.2 Die Inverse einer Matrix

Wenn $\mathbf{A}$ irgendeine Matrix ist und $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix ist, dann nennt man $\mathbf{A^{-1}}$ die Inverse von $\mathbf{A}$, falls folgendes gilt:

$$\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I}$$

Notwendige Bedingung für eine Inverse

$$\mathbf{A} \text{ ist invertierbar} \iff |\mathbf{A}| \neq 0$$

Falls $|\mathbf{A}| = 0$ ($|\mathbf{A}| \neq 0$), so nennt man $\mathbf{A}$ singulär (nicht singulär).

Die Inverse einer 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ |\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0 \Longrightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Inversen einer Matrix

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$-Matrizen.

(a) $\mathbf{A^{-1}}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A^{-1}})^{-1} = \mathbf{A}$
(b) $\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
(c) Die Transponierte $\mathbf{A'}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A^{-1}})'$
(d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ immer wenn c eine Zahl $\neq 0$

13.3.3 Cramer'sche Regel

Gegeben sei ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{13.3}$$

D_j sei folgendermassen definiert:

$$D_j = C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \ldots + C_{nj}b_n \tag{13.4}$$

wobei C_{ij} definiert sind wie in Abschnitt (13.3).

Wichtig Die j-te Spalte von $\mathbf{A}$ wird jeweils mit dem Vektor $\mathbf{b}$ ausgetauscht.

Cramer'sche Regel Das allgemeine lineare Gleichungssystem 13.3 mit n Gleichungen und n Unbekannten hat eine eindeutige Lösung genau dann wenn $\mathbf{A}$ nicht-singulär ist, d.h. $|\mathbf{A}| \neq 0$. Die Lösung lautet dann wie folgt:

$$x_1 = \frac{D_1}{|\mathbf{A}|}, \ x_2 = \frac{D_2}{|\mathbf{A}|}, \ \ldots, \ x_n = \frac{D_n}{|\mathbf{A}|}$$

wobei $D_1, D_2, \ldots, D_n$ wie in 13.4 definiert sind.

13.3.4 Homogene Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m1}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned} \tag{13.5}$$

Wird **homogenes** Gleichungssystem genannt. Ein homogenes Gleichungssystem hat immer eine triviale Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Nicht-triviale Lösung eines homogenen Systems

Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten der Art (13.5) hat nicht-triviale Lösungen

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n} \text{ ist singulär} \\
&\Longleftrightarrow |\mathbf{A}| = 0
\end{aligned}$$

13.3.5 Das Leontief Modell

Das Leontief-Modell benützt Matizen. Im Anhang findet sich dieses Modell.

Kapitel 14

Ökonomische Modelle

14.1 Das Leontief Modell

x_i Einheiten, welche die Industrie i vom Gut i pro Jahr herstellt.
a_{ij} Einheiten vom Gut i, um **eine** Einheit von Gut j herzustellen.
$a_{ij}x_i$ Einheiten von Gut i, um x_j Einheiten von Gut j herzustellen.

Hinweis Mit $a_{ij}x_i$ wird unterstellt, dass Input und Output linear zueinander in Beziehung stehen.

Damit alle Industrien produzieren können, muss die Industrie i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

Einheiten zur Verfügung stellen. Nennen wir b_i diejenige Nachfrage nach Gut i, welche keiner Industrie zugeordnet werden kann, dann ergibt sich folgende Gleichgewichtsbeziehung für Gut i:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i$$

Für die ganze Wirtschaft ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c}
(1-a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (1-a_{nn})x_n = b_n
\end{array}$$

14.1.1 Integration von Preisen

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$$

p_i Preis **einer** Einheit von Gut i
Die Produktion **einer** Einheit von Gut j kostet dann

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{nj}p_n$$

Der Gewinn **einer** Einheit von Gut j wird dann

$$p_j - a_{1j}p_1 - a_{2j}p_2 - \ldots - a_{nj}p_n = v_j$$

Unter Berücksichtigung aller Industrien erhält man dann:

$$\begin{aligned}
p_1 - a_{11}p_1 - a_{21}p_2 - \ldots - a_{n1}p_n &= v_1 \\
p_2 - a_{12}p_1 - a_{22}p_2 - \ldots - a_{n2}p_n &= v_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n - a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - \ldots - a_{nn}p_n &= v_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \mathbf{p} - \mathbf{A}'\mathbf{p} = \mathbf{v} \\
&\iff (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}')\mathbf{p} = \mathbf{v} \\
&\iff \mathbf{p}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \mathbf{v}'
\end{aligned}$$

Wobei $'$ ein Transponiertheitszeichen ist.